МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бобкова Полина Евгеньевна**

Технический балл: **85**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№5. Мин. кол-во букв О – 8 шт

1 ответ: ОТТОТТО ... ТТО = 22

Мах. кол-во букв О – 11 шт

т.к. при 12 „О" нужно, по крайней мере, 11 „Т" между ними

Разберем все 4 случая („О" – 11, 10, 9, 8)

„О" – 11 „Т" – 11 Напишем все О, между ними 10 промежутков, туда необходимо засунуть по одному „Т", оставшуюся „Т" в 1 из 10

$C_{10}^{1} = 10$

„О" – 10 „Т" – 12:

9 мест м-ду О, тогда по одному „Т"

Осталось 3 „Т" на 9 мест

$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

„О" – 9 „Т" – 13 8 мест между „О", тогда по одному „Т"

Осталось 5 „Т" на 8 мест

$C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

„О" – 8, „Т" – 14 7 мест м-ду „О", тогда по одному „Т"

Осталось 7 „Т" на 7 мест – 1 вариант

Итого: $10 + 84 + 56 + 1 = 151$

Ответ: 151

№2. $\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)$

$x^\circ = \frac{x\pi}{180}$ $\quad\quad$ $\sin x\pi = \sin 5\frac{x\pi}{180}$

$\sin x\pi = \sin\frac{x\pi}{36}$

$$\left[\begin{array}{l} x_1\pi = \frac{x_1\pi}{36} + 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z} \\ x_2\pi = \cancel{\pi} - \frac{x_2\pi}{36} + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 35x_1 = 72n \\ 37x_2 = 36 + 72k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{72n}{35} \\ x_2 = \frac{36}{37} + \frac{72k}{37} \end{array}\right.$$

$$x_2 - x_1 = \frac{-72n}{35} + \frac{36}{37} + \frac{72k}{37}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{36}{37\cdot 35}(35 + 70k - 74n)$$ Это уравнение имеет решение в целых числах

$\min(35 + 70k - 74n) = 1$, т.е. $70k - 74n = -34 \quad |:2$

$$37n - 35k = 17$$

$$k = \frac{37n - 17}{35}$$

$$k = n + \frac{2n-17}{35}$$

$$\frac{2n-17}{35} = l, \quad l\in\mathbb{Z}$$

$$2n - 17 = 35l$$

$$n = \frac{35l + 17}{2}$$

$$n = 17l + 8 + \frac{l+1}{2}$$

Итак, расстояние м-ду ближайшими корнями ур-ия равно $\frac{36}{37\cdot 35} = \frac{36}{1295}$

Ответ: $\frac{36}{1295}$

№4. a - целое из отр $[-6;5]$

$$3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-a-1=0$$

$x=-1$ корень, т.к. $-3a+3+13-2a-9a-a-1=0$

Тогда ур-ие: $(x+1)(3x^2+(3a+10)x-(a+1))=0$

т.е. ур-ие $3x^2+(3a+10)x-(a+1)=0$ должно иметь как минимум 1 целый корень.

Необходимо, чтобы $D=k^2$

$$D=9a^2+60a+100+12a+12$$

$$D=9a^2+72a+112=(3a+12)^2-32=k^2$$

$$(3a+12-k)(3a+12+k)=32$$

Обе скобки целые, одинак. чётности, левая меньше правой

Возможны такие варианты:

$$\begin{cases} 3a+12-k=2 \\ 3a+12+k=16 \end{cases} \left|\begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -16 \\ -2 \end{matrix} \left|\begin{matrix} -8 \\ -4 \end{matrix}\right|$$

$$\begin{cases} b-k=2 \\ b+k=16 \end{cases} \quad \begin{matrix} b=9 \\ k=7 \end{matrix} \Rightarrow a=-1$$

$$\begin{cases} b-k=4 \\ b+k=8 \end{cases} \quad \begin{matrix} b=6 \\ k=2 \end{matrix} \Rightarrow a=-2$$ - не подх. т.к. корни $x=-1$ $x=-\frac{1}{3}$ совпадает

$$\begin{cases} b-k=-16 \\ b+k=-2 \end{cases} \quad \begin{matrix} b=-9 \\ k=7 \end{matrix} \Rightarrow a=-7$$ - вне отрезка

$$\begin{cases} b-k=-8 \\ b+k=-4 \end{cases} \quad \begin{matrix} b=-6 \\ k=2 \end{matrix} \Rightarrow a=-6$$

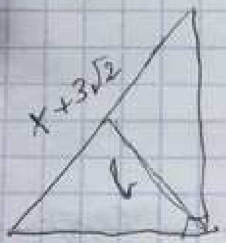
$a=-1$; $x_1=-1$ $x=0$ $x=-\frac{7}{3}$

$a=-6$; $x_1=-1$ $x_2=1$ $x_3=\frac{5}{3}$

Тогда вероятность равна: $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

3 . 1)



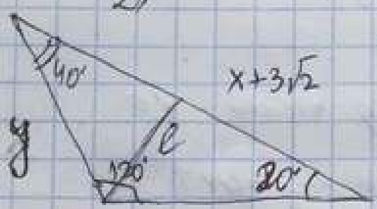
$$3\alpha + \alpha + 2\alpha = 180 \qquad \underline{\alpha = 30^\circ}$$

$$(x + 3\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = x$$

$$x = 6\sqrt{6} + 9\sqrt{2}$$

$$l = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cdot x\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{x}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3}+3$$

2)



$$9\alpha = 180 \qquad \alpha = 20^\circ$$

$$l = \frac{2xy\cdot\cos 60^\circ}{x+y}$$

$$\frac{x+3\sqrt{2}}{\sin 6\alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$$

$$y = \frac{x\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{2\cos\alpha}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2\cos\alpha} \qquad \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2\cos\alpha+1}$$

$$l = 2x\cdot\frac{1}{2\cos\alpha+1}\cdot\cos 3\alpha$$

$$x\cdot\sin 2\alpha + 3\sqrt{2}\cdot\sin 2\alpha = x\cdot\sin 6\alpha$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2\sin 4\alpha}$$

$$l = 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2\sin 4\alpha}\cdot\frac{1}{2\cos\alpha+1} = \frac{3\sqrt{2}\cos 3\alpha}{\sin 4\alpha\,(2\cos\alpha+1)}$$

$$l = \frac{3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sin 80^\circ(2\cos 20^\circ+1)}$$

Ответ: $3\sqrt{3}+3$ или $\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sin 80(2\cos 20^\circ+1)}$

№1.

$$\begin{cases} 1) \ \dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = 10 \\ 2) \ \dfrac{a_3+a_4+a_5+a_6}{4} = 90 \end{cases}$$

$$\overset{1}{a_1},\ \overset{2}{qa_1},\ \overset{3}{q^2a_1},\ \overset{4}{q^3a_1},\ \overset{5}{q^4a_1},\ \overset{6}{q^5a_1}$$

поделим 2) ур-е на 1)

$$\frac{a_3+a_4+a_5+a_6}{a_1+a_2+a_3+a_4} = 9$$

$$\frac{\cancel{a_1}(q^2+q^3+q^4+q^5)}{\cancel{a_1}(1+q+q^2+q^3)} = 9$$

$$q^5+q^4+q^3+q^2 = 9+9q+9q^2+9q^3$$

$$q^5+q^4-8q^3-8q^2-9q-9=0$$

Схема Горнера:

	1	1	-8	-8	-9	-9
-3	1	-2	-2	-2	-3	0

$q=-3$

	1	-2	-2	-2	-3
3	1	1	1	1	0

$q=3$

$$q^3+q^2+q+1=0$$

$$q^2(q+1)+(q+1)=0$$

$$(q+1)(q^2+1)=0$$

$q=-1$ не подх. по усл. $\quad q^2=-1$ $\varnothing$

При $q=-3$

$$\frac{a_1-3a_1+9a_1+27a_1}{4}=10$$

$$-20a_1=40$$

$$a_1=-2$$

$$a_6=a_1\cdot q^5=-2\cdot(-3)^5=486$$

При $q=3$

$$\frac{a_1+3a_1+9a_1+27a_1}{4}=10$$

$$40a_1=40$$

$$a_1=1$$

$$a_6=a_1\cdot q^5=1\cdot 273=273$$

Ответ: 273 или 486