МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Поштаренко Андрей Андреевич**

Технический балл: **80**

Дата: **17 мая 2020 года**

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов
Вариант 4–2

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 17$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_3}$.

2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 5. Высота, проведённая к гипотенузе, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 9. Найдите длину второго отрезка.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2,58\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите длину третьего ребра, если известно, что она на 1 меньше длины диагонали этого параллелепипеда.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 10x - 24$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

1) $\begin{cases} -ax+a^2=x^2-10x+24 \\ x^2-10x+24\le 0 \\ x\in[4;6] \end{cases}$

Будет $y=-ax+a^2$ и $y=x^2-10x+24$ касаются в $(x_0;y_0) \Rightarrow y'=-a=2x-10 \Rightarrow x=\frac{10-a}{2}$

2) $\left(\frac{10-a}{2}\right)^2-\frac{10-a}{2}(10-a)+24-a^2=-\left(\frac{10-a}{2}\right)^2+24-a^2=0$

$-(10-a)^2+(24-a^2)4=0$

$-100+20a-a^2+96-4a^2=0$

$5a^2-20a+4=0$

$D=400-16\cdot5=320=32\cdot10=64\cdot5$

$a=\frac{20\pm8\sqrt5}{2\cdot5}=\frac{10\pm4\sqrt5}{5}$

3) $a=\frac{10-4\sqrt5}{5}$ – условие касания с графиком параболы при $x\in[4;6]$, $a=\frac{10+4\sqrt5}{5}$ – условие касания с графиком при $x\in(0;4)$

При $a\in\left(0;\frac{10-4\sqrt5}{5}\right)$ 2 решения

$a=\frac{10-4\sqrt5}{5}$ – 1 решение

Ответ: при $a\in\left(-\infty;\frac{10-4\sqrt5}{5}\right)$ – 2 решения

при $a=\frac{10-4\sqrt5}{5}$ – 1 реш.

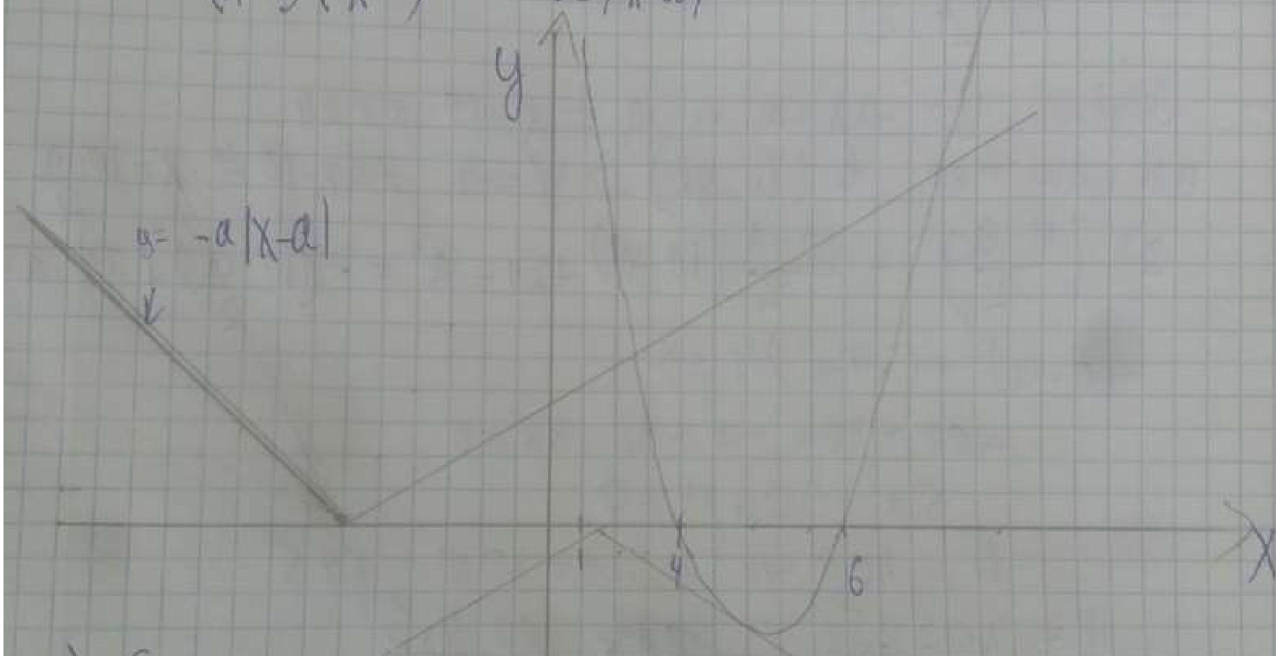
при $a\in(4;6)$ – 2 решения

при $a=\{4;6\}$ – 1 решение

5) $x^2 + a|x-a| = 10x - 24$

$x^2 - 10x + 24 = -a|x-a|$

$(x-6)(x-4) = -a|x-a|$



1) При $a < 0$ 2 решения, т.к. правая ветвь модуля пересекает обе ветви параболы

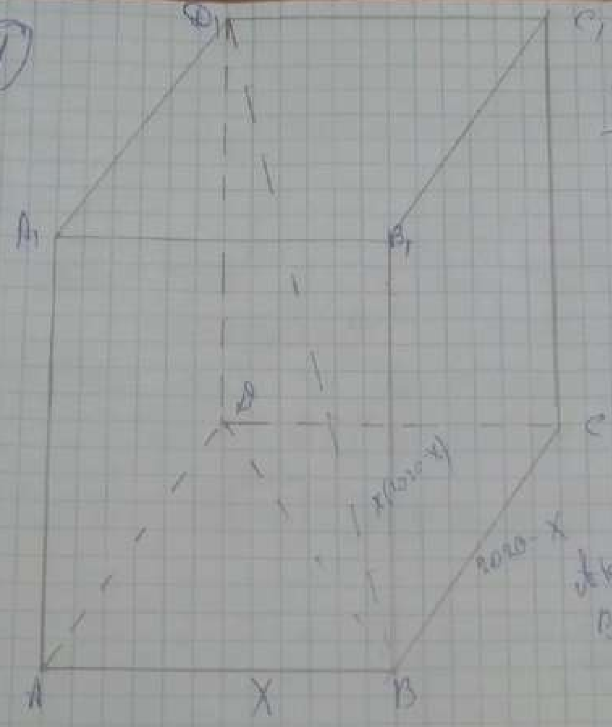
2) При $a = 0$ $-a|x-a| = 0$ — 2 решения ($x=4$; $x=6$)

3) При $a > 0$

Рассмотрим $a \in (0; 4)$. Решение будет при малых a, когда правая ветвь модуля пересечет параболы.

Найдем точку касания правой части и x^2 параболы

4



~~Пусть AB~~

Пусть $AB = x$,
$BC = 2020 - x$,
$BB_1 = x(2020 - x)$

Решение:

Из $\triangle ABC$:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 =$
$= x^2 + (2020 - x)^2$

Аналогично из $\triangle BAD$
$BD^2 = x^2 + (2020 - x)^2$

По усл $DD_1 \perp AD, DC \Rightarrow DD \perp ADCB \Rightarrow DD_1 \perp BD$

Из $\triangle BDD_1$: $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$

Т.к. $DD_1 = BB_1$, то ур-е имеет вид:

$BD^2 + DD_1^2 = BD_1^2 = (AA_1 + 1)^2$

$x^2 + (2020 - x)^2 + (2020x - x^2)^2 = (2020x - x^2 + 1)^2$

$x^2 + 2020^2 - 4040x + x^2 + 2020^2x^2 - 4040x^3 + x^4 =$

$= \cancel{4040}\ 2020^2x^2 + x^4 + 1 - 4040x^3 + 4040x - 2x^2$

$x^2 + 2020^2 - 4040x + x^2 = 1 + 4040x - 2x^2$

$4x^2 - 8080x + 2020^2 - 1 = 0$

$4(x^2 - 2020x) = 1 - 2020^2$

~~$4(2020x - x^2) =$~~

$\underbrace{4(2020x - x^2)}_{\text{искомое } BB_1} = 2020^2 - 1$

2019
2021
18189
2021
4038
4080399

$BB_1 = \frac{2020^2 - 1}{4} = \frac{2019 \cdot 2021}{4} = 1020099{,}75$

Ответ: $BB_1 = 1020099{,}75$

$x_2,\ k_2 = 0 \quad > \quad x_1,\ k_1 = -1$

$$\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}32 + 8\pi k_2}}{2} > \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 - 2\pi(4k_1+1) - 5{,}16}}{2}$$

$$\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}32} > -\pi + \sqrt{\pi^2 + 6\pi - 5{,}16}$$

$$2\pi > \sqrt{\pi^2 + 6\pi - 5{,}16} - \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}32}$$

Т.к. $6\pi - 5{,}16 < 2\pi + 10{,}32$

$4\pi < 15{,}48$

$4\pi < 4 \cdot 3{,}2 < 15{,}48$

$12{,}8 < 15{,}48$

То $\sqrt{\pi^2 + 6\pi - 5{,}16} - \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}32} < 0, \Rightarrow < 2\pi$

Значит $x_1 < x_2$

Ответ: $\frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 6\pi - 5{,}16}}{2}$

2) $\cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} - 1,29\right) = 0$

$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} - 1,29 = \frac{\pi}{2} + \pi k_2$

$x^2 - \pi x - \frac{\pi}{2} - 2,58 - 2\pi k_2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32 + 8\pi k_2}}{2}$

$D > 0$: $\pi^2 + 2\pi + 10,32 + 8\pi k_2 > 0$

$k_2 > -\frac{(\pi^2 + 2\pi + 10,32)}{8\pi} \approx$

$\approx -\frac{(9,86 + 6,28 + 10,32)}{8\pi} = -\frac{26,48}{8\pi} \approx -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_2 \geq 0$, $k_2 \in Z$

Т.к. под дискриминантом стоит π^2 + положительное число, то $\frac{\pi - \sqrt{D}}{2} < 0$ – не подходит.

Сравним

$\min\left(x_2 = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32 + 8\pi k_2}}{2}\right)$, $k_2 \geq 0$, $k_2 \in Z$

и $\min\left(x_1 = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 - 2\pi(4k_1+1) - 5,16}}{2}\right)$ $k_1 \leq -1$, $k_1 \in Z$

Т.к. в x_2 под D k_2 стоит со знаком плюс, то наименьшее x_2 при наименьшем k_2 из ОДЗ – $k_2 = 0$

Т.к. в x_1 под D k_1 со знаком минус, то наименьшее x_1 при наибольшем k_1 из ОДЗ – $k_1 = -1$

3) $\sin(x^2 - 2{,}58) = \cos(\pi x)$

$\sin(x^2 - 2{,}58) = \sin(\frac{\pi}{2} - \pi x)$

$\sin(x^2 - 2{,}58) - \sin(\frac{\pi}{2} - \pi x) = 0$

$2\sin\left(\frac{x^2 - 2{,}58 - \frac{\pi}{2} + \pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{x^2 - 2{,}58 + \frac{\pi}{2} - \pi x}{2}\right) = 0$

$\cancel{1)\ \sin \frac{x^2}{2} -}$

$\sin\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} - 1{,}29\right)\cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} - 1{,}29\right) = 0$

1) $\sin\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} + 1{,}29\right) = 0$

$\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} + 1{,}29 = \pi k,$

$x^2 + \pi x - \frac{\pi}{2}(1+4k) + 1{,}29 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 2\pi(1+4k) - 5{,}16}}{2}$

ОДЗ:

1) $D > 0$: $\pi^2 - 5{,}16 - 2\pi(4k+1) > 0$

$2\pi(4k+1) < \pi^2 - 5{,}16$

$4k+1 < \frac{\pi^2 - 5{,}16}{2\pi}$

$k < \frac{\pi^2 - 2\pi - 5{,}16}{8\pi}$

$\approx -\frac{1{,}58}{8\pi} \Rightarrow k \le -1$

$k \in Z$

$AC^2 - 9AC = 100 + AC^2 + 29AC - 60\sqrt{AC} - 6AC\sqrt{AC}$

$\sqrt{AC} = t$

$3t^3 - 19t^3 + 30t - 50 = 0$

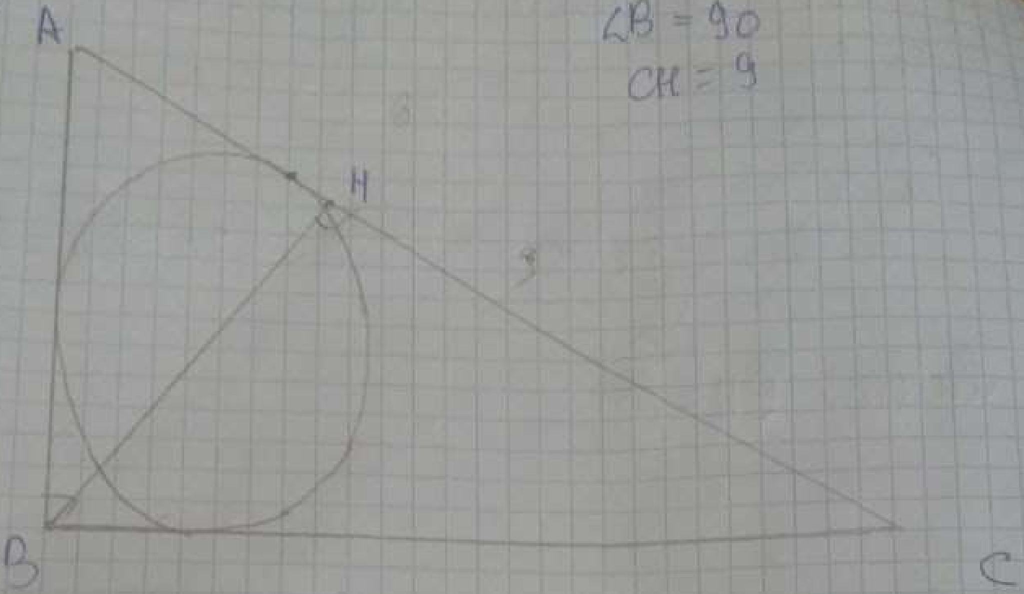
$t = 5$ (подбор)

$(t-5)(3t - 4t + 10) = 0 \Rightarrow AC = 25 \Rightarrow BH = 16$

$D < 0$

Ответ: $BH = 16$

Дано: $r = 3$
$\angle B = 90$
$CH = 9$



1) $r = \dfrac{AB + BC - AC}{2} = 5$

$\cancel{AB}$ $AB + BC - AC = 10 \Rightarrow AB = 10 - BC + AC$

2) $BH = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$

$\cancel{BH = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}}$

По теор. о сред. геометрич.

$AB^2 = (AC - 9)AC \Rightarrow$

$BC^2 = 9\,AC \Rightarrow BC = 3\sqrt{AC}$

3) По теор. Пифагора из ΔBCH

$BH^2 = BC^2 - HC^2 = 9AC - 81 \Rightarrow BH = 3\sqrt{AC - 9}$

Из п. 2

$\cancel{BH \cdot AC = AB \cdot BC}$ $\qquad \cancel{BC^2}$

$BC = \sqrt{AC^2 - 9AC} = 10 + AC - 3\sqrt{AC}$

① $b_1 = 1$
$b_{b_2} = 17$
$b_n - ?$
$n = b_{b_3}$

1) $b_{b_2} = b_1 + d(b_2 - 1) = 1 + d(b_2 - 1) = 17$
$b_2 = b_1 + d \Rightarrow b_2 = \cancel{b_1} d + b_1 = d + 1$

Тогда
$b_{b_2} = 1 + d(b_2 - 1) = 1 + d(d + 1 - 1) = 17$
$d^2 = 4$
$\begin{cases} d = \pm 4 \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow d = 4$
т.к. посл. возраст.

2) $b_{b_{b_3}} = b_1 + d(b_{b_3} - 1)$
Также
$b_3 = b_1 + d(3 - 1) = 1 + 4 \cdot 2 = 9$
$b_{b_3} = b_9 = b_1 + 8d = 1 + 32 = 33$

Тогда $b_n = b_{b_{b_3}} = \cancel{b_1 + \ldots}\ b_1 + d(b_{b_3} - 1) = 1 + 4(33 - 1) = 129$

Ответ: 129