МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гусаров Николай Николаевич**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1. $b, bq, bq^2, bq^3, bq^4, bq^5$ – геом. прогр.,

b – I член

q – знаменатель

$$\begin{cases} \dfrac{b+\ldots+bq^3}{4} = 10 \\ \dfrac{bq^2+\ldots bq^5}{4} = 90 \end{cases}$$ – по усл.

$\boxed{bq^5 - ?}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(1+\ldots+q^3) = 40 \ (1) \\ bq^2(1+\ldots+q^3) = 360 \end{cases} \Leftrightarrow$$ т. к. $\begin{cases} 1+\ldots+q^3 \neq 0 \\ b \neq 0 \\ q \neq 0 \end{cases}$, $q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$

Из (1): $b\left(1+\dfrac{q^4-1}{q-1}\right) = 40 \Rightarrow b = 40 \dfrac{(\pm 3-1)}{81-1} = \dfrac{(\pm 3 - 1)}{2} = -2;\ 1$

$\Rightarrow (b; q) = (-2; -3)$ или $(1; 3) \Rightarrow bq^5 = -2\cdot(-3)^5$ или $1\cdot 3^5 =$

$= +2\cdot 3^5$ или $1\cdot 3^5$; $3^5 = 81\cdot 3 = 243$; $2\cdot 243 = 486$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} bq^5 = 243 \\ bq^5 = 486 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} bq^5 = 243 \\ bq^5 = 486 \end{array}\right.$

№2 $\sin \pi x = \sin 5x^\circ$, $\sin \pi x = \sin\left(\frac{5x\pi}{180}\right)$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{x\pi}{36} + 2\pi n \\ \pi x = \pi - \frac{x\pi}{36} + 2\pi k \end{array}\right., n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{35}{36} x = 2n \\ \frac{37}{36} x = 2k+1 \end{array}\right., n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{72n}{35} \\ x_2 = \frac{36(2k+1)}{37} \end{array}\right., n, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим минимум между x_1 и x_2 $\Rightarrow \left|\frac{72n}{35} - \frac{36(2k+1)}{37}\right| \to \min$

1) $\frac{72n}{35} - \frac{36(2k+1)}{37} \geq 0$: $\frac{2n}{35} - \frac{(2k+1)}{37} \to \min$; $2 \cdot 37n - (2k+1)35 \to \min$

(I) $74n - 70k - 35 = a \overset{\in \mathbb{Z}}{\to} \min$, $2(37n - 35k) - 35 = a$. Может ли $a = 1$ ($1 > 0$ и $1 \in \mathbb{Z}$). При $n = 9$, $k = 9$ $a = 1$ (получено из $37n - 35k = 18$)

$\Rightarrow 74n - 70k - 35 = 1$, $\frac{2n}{35} - \frac{(2k-1)}{37} = \frac{1}{35 \cdot 37}$, $\frac{72n}{35} - \frac{36(2k+1)}{37} = \frac{36}{35 \cdot 37}$

при $n = 9$; $k = 9$

2) $a = 0$ в (I) не достигается т.к. $74n \vdots 2$; $70k \vdots 2$; $35 \not\vdots 2$; $0 \vdots 2$

$\Rightarrow a = 1$ – минимум

3) Случай $\frac{72n}{35} - \frac{36(2k+1)}{37} < 0$ отличается от 1) знаком; $a = 1$ достигается $\Rightarrow$

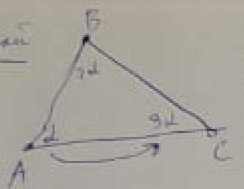
$\Rightarrow$ этот сл. не разбираем

4) Мин расст. внутри серий: $\Delta x_1 = \left|\frac{72(n+1)}{35} - \frac{72n}{35}\right| = \frac{72}{35} > \frac{36}{35 \cdot 37}$

$\Delta x_2 = \left|\frac{36(2(k+1)+1)}{37} - \frac{36(2k+1)}{37}\right| = \frac{36}{37} > \frac{36}{35 \cdot 37}$

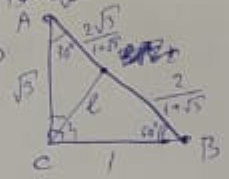
$\Rightarrow$ **Ответ**: мин. расст $= \frac{36}{35 \cdot 37}$

№3 1 случай



$3\alpha > 2\alpha > \alpha$; $6\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 30$

~~AB~~



вместо x — $\sqrt{3}$, $=AC$

вместо $x+\sqrt{2}\cdot 3$ — $2 = AB$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3\sqrt{2}) = x$,

$x = 6\sqrt{6} - 9\sqrt{2}$

Поменяем ед. изм:

$$l^2 = \sqrt{3}\cdot 1 - \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{6}{\sqrt{3}+1} \; ; \quad l' = \frac{6}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}} = 9+3\sqrt{3}$$

I случай

2 случай

$\alpha+2\alpha+6\alpha=180° \Rightarrow \alpha = 20°$

В наших ед. изм

— Из теор синусов: $\frac{AC}{\sin(120°)} = \frac{AB}{\sin(20°)} = \frac{BC}{\sin(40°)}$

вместо $x+\sqrt{2}\cdot 3$ — $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

вместо x — $\sin 40°$

$$l^2 = \sin 20°\cdot\sin 40°\left(1 - \frac{3/4}{(\sin 20°+\sin 40°)^2}\right);$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin 40°} = \frac{x+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2}, \quad x = \frac{\sin 40°\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2 - \sin 40°}$$

$$l' = \sqrt{l^2}\cdot\frac{x}{\sin 40°} = \sqrt{\sin 20°\sin 40°\left(1-\frac{3/4}{(\sin 20°+\sin 40°)^2}\right)}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 40°}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} l' = 9+3\sqrt{3} \\ l' = \sqrt{\sin 20°\cdot\sin 40°\left(1-\frac{3/4}{(\sin 20°+\sin 40°)^2}\right)}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 40°} \end{array}\right.$

№4 $f(x) = 3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - (a+1)$

$f(-1) = -3 + (3a+13) - (2a+9) - (a+1) = 0$, $x = -1 \in \mathbb{Z}$ - корень

$\Rightarrow f(x) = (x+1)(3x^2 + (10+3a)x - (a+1))$

$\Rightarrow$ у $3x^2 + (10+3a)x - (a+1)$ д. б. 2 разл. корня, минимум 1 из кот. целый

$\Rightarrow \sqrt{D} \in \mathbb{Z}$, $D = (10+3a)^2 + 4 \cdot 3(a+1) = 100 + 9a^2 + 60a + 12a + 12 =$

$= 9a^2 + 72a + 112$.

1) $a = -6$, $D = 4$, $x = \frac{8 \pm 2}{6} = \frac{4}{3}; 1$ - подх

2) $a = -5$ $D = -23$

3) $a = -4$ $D = -32$

4) $a = -3$ $D = -23$

5) $a = -2$ $D = 4$, $x = \frac{-4 \pm 2}{6} = -1; -\frac{1}{3}$ - подх, но -1 уже корень

6) $a = -1$ $D = 49$, $x = \frac{7 \pm 7}{6} = 0; \frac{7}{3}$ - подх

7) $a = 0$ $D = 112$

8) $a = 1$ $D = 193$

9) $a = 2$ $D = 292$

10) $a = 3$ $D = 409$

11) $a = 4$ $D = 544$

12) $a = 5$ $D = 697$

$\Rightarrow$ Подх $a = -6$ и -1 (2 из 12)

$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ответ: $P = \frac{1}{6}$

№5 Преобразуем все 22-букв. слова, убрав "О" из конца, тогда требуется подсчитать слова из 21 буквы.

Их можно разбить на части а = "ОТ" и в = "ОТТ", тогда любое из искомых слов можно записать как некоторая последоват из а и в.

1) Если у нас 7 в и 0 а, $\underbrace{в \dots в}_{7\text{ шт}}$ $C_7^0 = 1$

2) Если 6 в, $21 - 6 \cdot 3 = 3 \not\vdots\, 2$ => 6 в не мож. б.

3) 5 в, $21 - 5 \cdot 3 = 6$, $\frac{6}{2} = 3$ => 5 в и 3 а $C_8^3 = \frac{5 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$

4) 4 в, $21 - 3 \cdot 4 \not\vdots\, 2$

5) 3 в, $21 - 3 \cdot 3 = 12$, $\frac{12}{2} = 6$ => 3 в и 6 а, $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 12 \cdot 7 = 84$

6) 2 в, $21 - 2 \cdot 3 \not\vdots\, 2$

7) 1 в, $21 - 3 = 18$, $\frac{18}{2} = 9$ => 1 в и 9 а, $C_{10}^1 = 10$

=> Всего вар-тов $1 + 56 + 84 + 10 = 151$

Ответ: 151.