МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кривчук Василий Олегович**

Технический балл: **85**

Дата: **17 мая 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов

Вариант 4–1

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2,57\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

Тогда сравним $\dfrac{\pi-\sqrt{\pi^2-6\pi+10,28}}{2}$ и $\dfrac{-\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+10,28}}{2}$

$$\pi-\sqrt{\pi^2-6\pi+10,28} > -\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+10,28}$$

$$2\pi > \sqrt{\pi^2+2\pi+10,28}+\sqrt{\pi^2-6\pi+10,28}$$

$$4\pi^2 > 2\pi^2-4\pi+20,56+2\sqrt{(\pi^2-6\pi+10,28)(\pi^2+2\pi+10,28)}$$

$$2\pi^2+4\pi-20,56 > 2\sqrt{(\pi^2-6\pi+0,28)(\pi^2+2\pi+10,28)}$$

$$\pi^2+2\pi-10,28 > \sqrt{(\pi^2-\ldots)}$$

Ответ: $\dfrac{\pi-\sqrt{\pi^2-6\pi+10,28}}{2}$

№3.

$\sin(x^2-2,57)=\cos\pi x$

$\sin(x^2-2,57)=\sin(\frac{\pi}{2}-\pi x)$

$\sin(x^2-2,57)-\sin(\frac{\pi}{2}-\pi x)=0$

Пусть $x^2-2,57=a$, $\frac{\pi}{2}-\pi x=b$.

$\sin a-\sin b=0$

По формуле разности $2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{a-b}{2}=0\\ \cos\frac{a+b}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a-b}{2}=\pi k\\ \frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-b=2\pi k\\ a+b=\pi+2\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-b+2\pi k=0\\ a+b-\pi+2\pi k=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x^2-2,57-(\frac{\pi}{2}-\pi x)+2\pi k=0\\ x^2-2,57+\frac{\pi}{2}-\pi x-\pi+2\pi k=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2\pm\pi x-2,57+2\pi k-\frac{\pi}{2}=0$

Тогда $D=\pi^2-4(-2,57-\frac{\pi}{2}+2\pi k)=\pi^2+2\pi+8\pi k+10,28$, $k\in Z$

$x=\frac{\pm\pi\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{\pm\pi\pm\sqrt{\pi^2+2\pi+8\pi k+10,28}}{2}$

При $k\leq-2$ $D<0$ $\Rightarrow k>-2$

При $k=-1$ $D=\pi^2-6\pi+10,28$

при $k=0$ $D=\pi^2+2\pi+10,28$

при $k=1$ $D=\pi^2+10\pi+10,28$

далее чем больше k, тем больше D, поэтому больше будет 4 положительный корень => рассматриваем только $k=-1$ и $k=0$

Получаем 8 значений

$x_{1,2,3,4}=\frac{\pm\pi\pm\sqrt{\pi^2-6\pi+10,28}}{2}$ $\quad x_{5,6,7,8}=\frac{\pm\pi\pm\sqrt{\pi^2+2\pi+10,28}}{2}$

$x_{1,2,3,4}\approx\frac{\pm\pi\pm1,14}{2}$ $\quad x_{5,6,7,8}\approx\frac{\pm\pi\pm5,14}{2}$

Очевидно, значения $\frac{-\pi\pm1,14}{2}$, $\frac{\pi+1,14}{2}$, $\frac{\pi+5,14}{2}$, $\frac{\pm\pi-5,14}{2}$ не подходят

Остаются $x=\frac{\pi-1,4}{2}$, $x=\frac{-\pi+5,14}{2}$ и оба приблизительно равны $x\approx1$

Отсюда $x=\frac{8-a}{2}$.

Приравняем значения в этой точке

$y=-ax+a^2=x^2-8x+15$

Подставим x:

$-a(\frac{8-a}{2})+a^2=(\frac{8-a}{2})^2-8(\frac{8-a}{2})+15$

$\frac{a^2-8a}{2}+a^2=\frac{a^2-16a+64}{4}-4(8-a)+15 \quad |\cdot4$

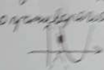
$2a^2-16a+4a^2=a^2-16a+64-16(8-a)+60$

$5a^2=124-128+16a$

$5a^2-16a+4=0$

$a=\frac{16\pm\sqrt{256-80}}{10}=\frac{16\pm\sqrt{176}}{10}=\frac{16\pm4\sqrt{11}}{10}=\frac{8\pm2\sqrt{11}}{5}$

($\frac{8+2\sqrt{11}}{5}$ – лишний корень, т.к. в этом случае a больше 0, а это противоречит)



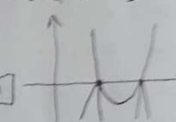
В данном случае берем $a=\frac{8-2\sqrt{11}}{5}$. Это точка касания.

Значит все любые a меньше этого значения нам подходят

Итого: $a\in(-\infty;0)$, $a\in[3;5]$ и $a\in(-\infty;\frac{8-2\sqrt{11}}{5}]$

Значит решения будут при $a\in(-\infty;\frac{8-2\sqrt{11}}{5}]\cup[3;5]$

В точках $x_1=3$ и $x_2=5$ угловые коэффициенты касательной к параболе равны -2 и 2, а наклон уголка равен $k=-3$ и $k=-5$ соответственно => корень будет всего один



Ответ: решения есть при $a\in(-\infty;\frac{8-2\sqrt{11}}{5}]\cup[3;5]$

1 решение при $a=\frac{8-2\sqrt{11}}{5}$, $a=3$, $a=5$

2 решения при $a\in(-\infty;\frac{8-2\sqrt{11}}{5})\cup(3;5)$

Составляем систему из этих трёх уравнений

$$\begin{cases} \frac{a+b-(16+x)}{2} = r = 5 \\ a^2+b^2=(16+x)^2 \\ ab = 4\sqrt{x}(16+x) \end{cases}$$

из ур-ния 1 $a+b = 10+(16+x) = 26+x$

$(a+b)^2 = (26+x)^2$

$a^2+2ab+b^2 = (26+x)^2$ – подставим a^2+b^2 и ab из ур-ния 2 и 3

$(16+x)^2 + 2\cdot 4\sqrt{x}\,(16+x) = (26+x)^2$

$(16+x)\,8\sqrt{x} = (26+x)^2 - (16+x)^2$ – разность квадратов

$128\sqrt{x} + 8x\sqrt{x} = 10\cdot(42+2x)$

Пусть $\sqrt{x} = t$

$128t + 8t^3 = 420 + 20t^2$ $\quad 1:4$

$2t^3 - 5t^2 + 32t - \cancel{420}\ 105 = 0$

Первый корень подбираем $t=3$. Тогда

$(t-3)(2t^2+t+35)=0$

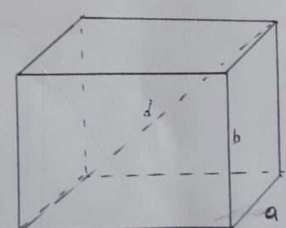
у второй скобки $D<0$ => корней других нет.

$t=3$

$x = t^2 = 9$

Ответ: 9.

№4.



Обозначим рёбра как a, b, c,
диагональ как d.

Т.к. это прямоуг. параллелепипед, то

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

По условию $\begin{cases} d = c+1 \\ a+b=2020 \\ ab = c \end{cases}$

Решим эту систему уравнений

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = c+1$

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2020^2 - 2c$

$\sqrt{2020^2 - 2c + c^2} = c+1$

$2020^2 - 2c + c^2 = c^2 + 2c + 1$

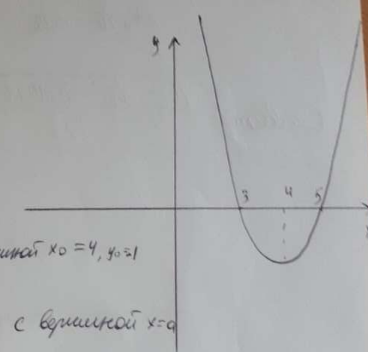
$4c = 2020^2 - 1$

$c = \frac{2020^2-1}{4}$

При этом $d = c+1 = \frac{2020^2-1}{4} + 1 = \frac{2020^2+3}{4}$

Ответ: $d = \frac{2020^2+3}{4}$

№5.



$x^2 + a|x-a| = 8x - 15$

$x^2 - 8x + 15 = -a|x-a|$

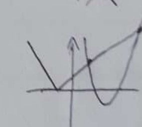
В координатах XOY построим
левую и правую функцию.

1) левая функция $y = x^2 - 8x + 15$
это парабола ветвями вверх с вершиной $x_0 = 4, y_0 = 1$
и корнями $x_1 = 3$, $x_2 = 5$

2) правая функция – это уголок с вершиной $x = a$
и углом наклона прямых $k = -a$.

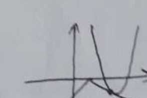
3) Рассмотрим ситуации, когда решения будут

а) вершина уголка между ветвями параболы.
Тогда $a \in [3; 5]$



б) ветви уголка направлены вверх
тогда $a \in (-\infty; 0]$

в) вершина уголка вне ветвей параболы, но
они пересекаются



4) Рассмотрим пункт в и найдём такое a, когда
это начинает выполняться. Чтобы найти крайнее
значение a, рассмотрим первый момент, когда они начинают
касаться.

а) уравнение прямой $y = -a(x-a) = -ax + a^2$

б) уравнение параболы $x^2 - 8x + 15 = 0$

в) т.к. они касаются, то $y' = -a$ – прямая есть касательная к параболе

$y' = 2x - 8 = -a$

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22. b_7-?

№1.

$b_1=1$

$b_{b_2}=10$

b_{b_3}-?

Решение:

Пусть d – шаг арифметич. прогрессии. Сначала найдем его. $b_1=1$ и $b_{b_2}=10$. При этом $b_2=b_1+d$

Тогда $b_{b_2}=b_1+(b_1+d-1)d$ по формуле члена арифм. прогрессии

$b_{b_2}=1+(1+d-1)d$

$b_{b_2}=1+d^2=10$

$d^2=10-1=9$

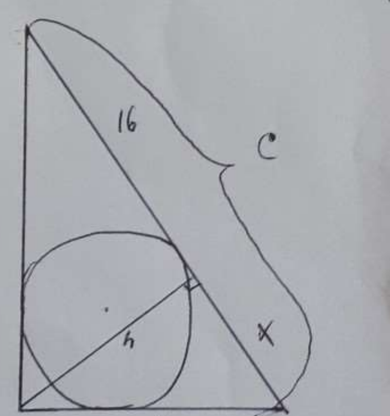
Т.к. прогрессия возрастающая, то $d=3$.

Тогда $b_3=7$, а $b_{b_3}=b_7=1+(7-1)\cdot 3=19$.

Тогда $b_{b_{b_3}}=b_{b_7}=b_{19}=1+(19-1)\cdot 3=55$

Ответ: 55

№2.



Обозначим другой отрезок гипотенузы, как x, высоту как h, катеты как a и b, гипотенузу как c и радиус вписанной окр-ти $r=5$

1) По формуле радиуса впис. окр-ти

$$r=\frac{a+b-c}{2} \Rightarrow r=\frac{a+b-(16+x)}{2}$$

2) По формуле о ср. геометрическом в прямоугольном треугольнике

$$h=\sqrt{16\cdot x}=4\sqrt{x}$$

3) Запишем площадь двумя способами

$$S=h\cdot c\cdot\frac{1}{2}=a\cdot b\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow h\cdot c=ab \Rightarrow ab=4\sqrt{x}\,(16+x)$$

4) По т. Пифагора $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+b^2=(16+x)^2$