



89-12-82-34
(138.1)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 - 02

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наименование олимпиады

по физике профиль олимпиады

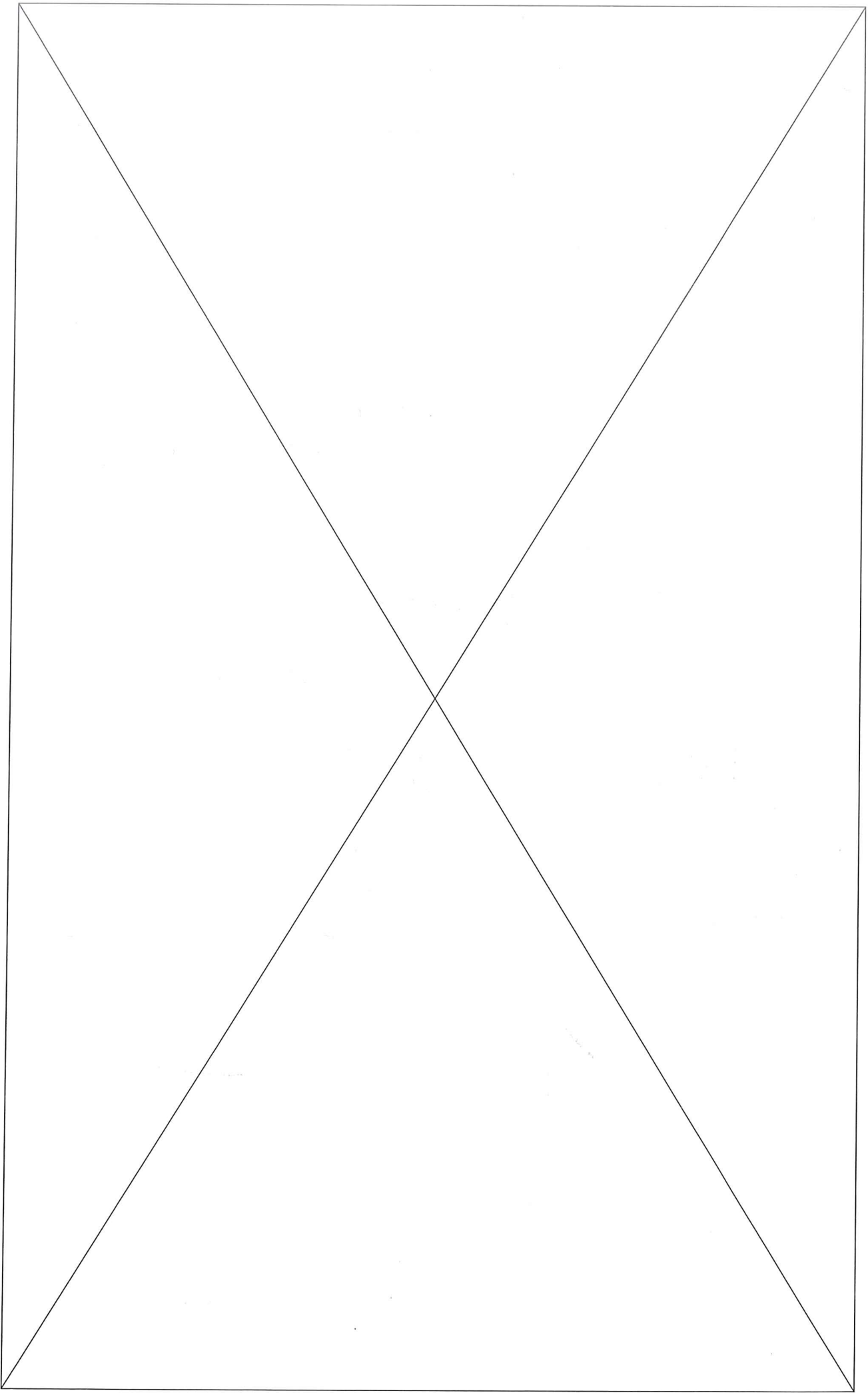
Андреева Улья Александровна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

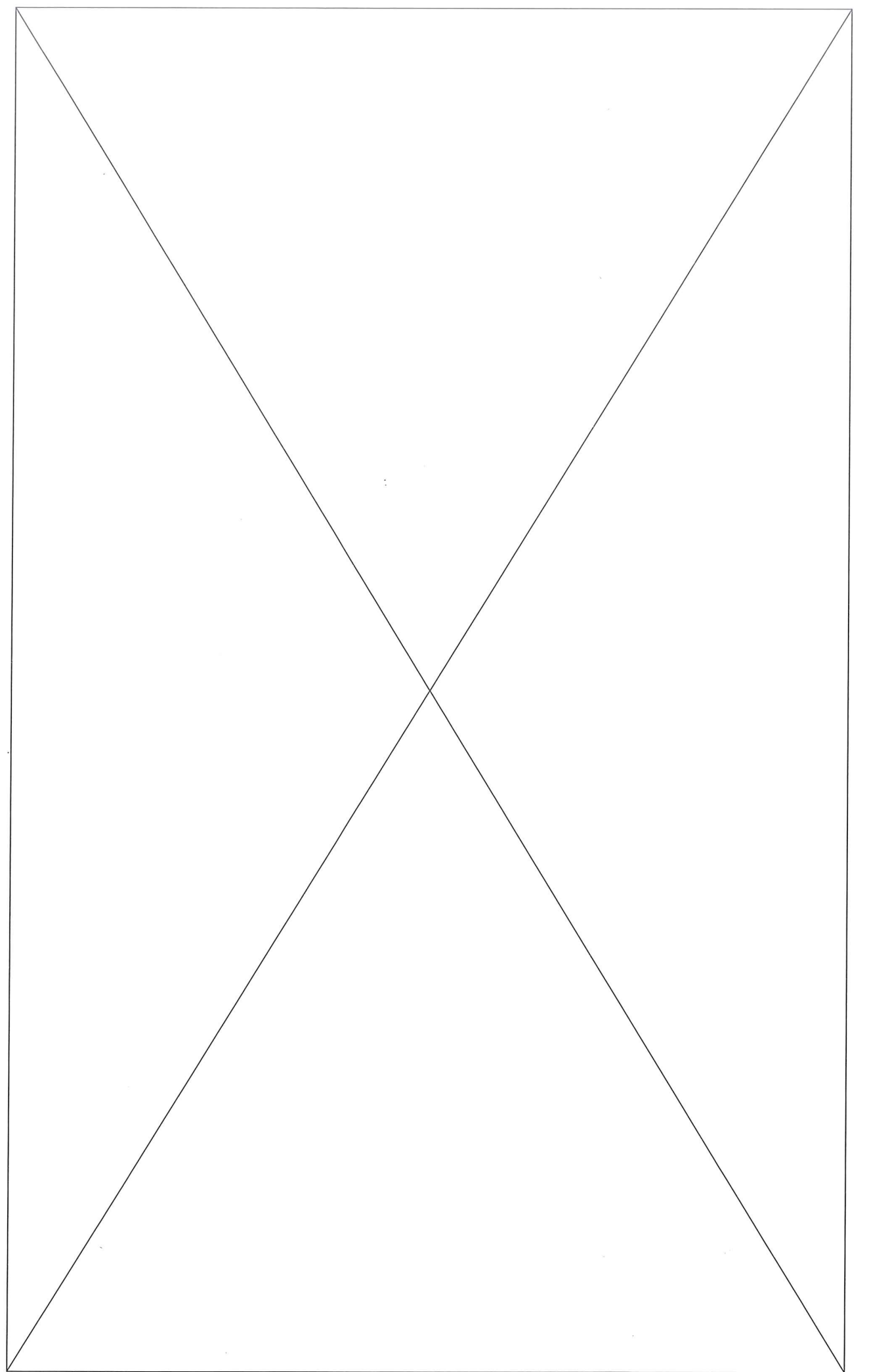
« 03 » августа 2026 года

Подпись участника

Андреева



Выполнять задания на титульном листе запрещается!



Выполнять задания на титульном листе запрещается!

Чистовик

Стор. 2

порядка единицы $\frac{n_2}{n_1}$ не слишком мало $\Rightarrow \varepsilon$ м.м. $\frac{n_2}{n_1} \varepsilon = \varphi + \frac{\alpha}{n_1} \Rightarrow \varepsilon = \frac{n_1}{n_2} \varphi + \frac{\alpha}{n_2}$

$\xi = \varepsilon - \varphi \approx \frac{n_1 - n_2}{n_2} \varphi + \frac{\alpha}{n_2} = -\frac{\Delta n}{n_2} \varphi + \frac{\alpha}{n_2}$

$n_2 \sin \xi = \sin(\alpha + \delta) \Rightarrow \sin(\alpha + \delta) \approx n_2 \xi = -\Delta n \varphi + \alpha$ - малое значение.

$\alpha + \delta = -\Delta n \varphi + \alpha \Rightarrow \delta = -\Delta n \cdot \varphi$ (т.е. во-первых "воши" изначальное направление)

Если бы сначала была среда n_2 , а потом n_1 , то $\delta = +\Delta n \cdot \varphi$, т.е. отклонится на такое же значение, но в другую сторону. Но по модулю луч отклоняется на $|\delta| = \Delta n \cdot \varphi = 0,5 \cdot 3 = 1,5^\circ$. Данный результат применим только при малых значениях углов φ и α (но от этого значения α (при малых углах) результат не зависит).

Ответ: $|\delta| = \Delta n \cdot \varphi = 1,5^\circ$ (если сначала n_1 , то луч отклонится "наверх", или вниз).

Задача 3

Ответ на вопрос: Из закона сохранения энергии энергия созданного поля равна механической работе внешней силы по перемещению одного шарика с бесконечности до расстояния r . П.к. $\frac{a \ll r}{a \gg r}$, можно считать их точечными зарядами. Тогда $A_{\text{вн}} = A_{\text{ин}} = q\varphi = q \cdot \frac{kq}{r} \Rightarrow W = A_{\text{ин}} = \frac{kq^2}{r}$

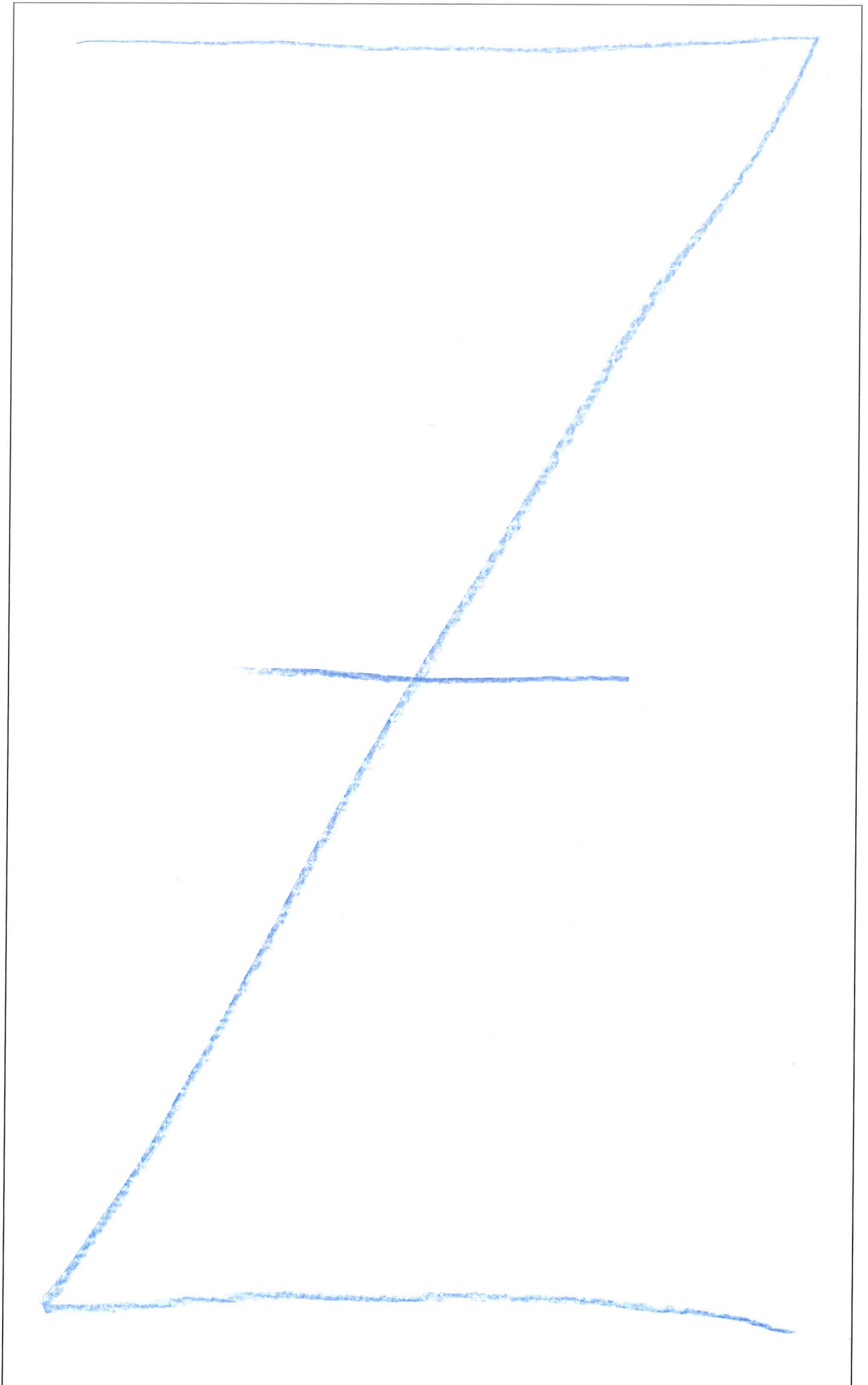
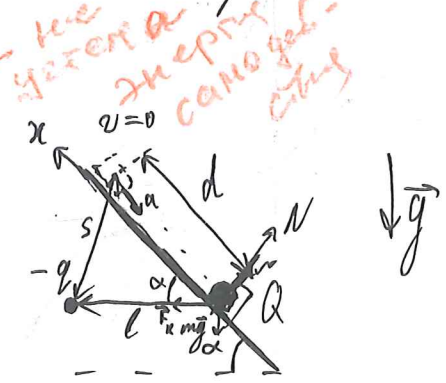
Но это просто по формуле энергии взаимодействия $W = \sum_i \frac{1}{2} q_i \varphi_i = \frac{1}{2} (q \cdot \frac{kq}{r} + q \cdot \frac{kq}{r}) = \frac{kq^2}{r}$ (пренебрегаем a в сравнении с r).

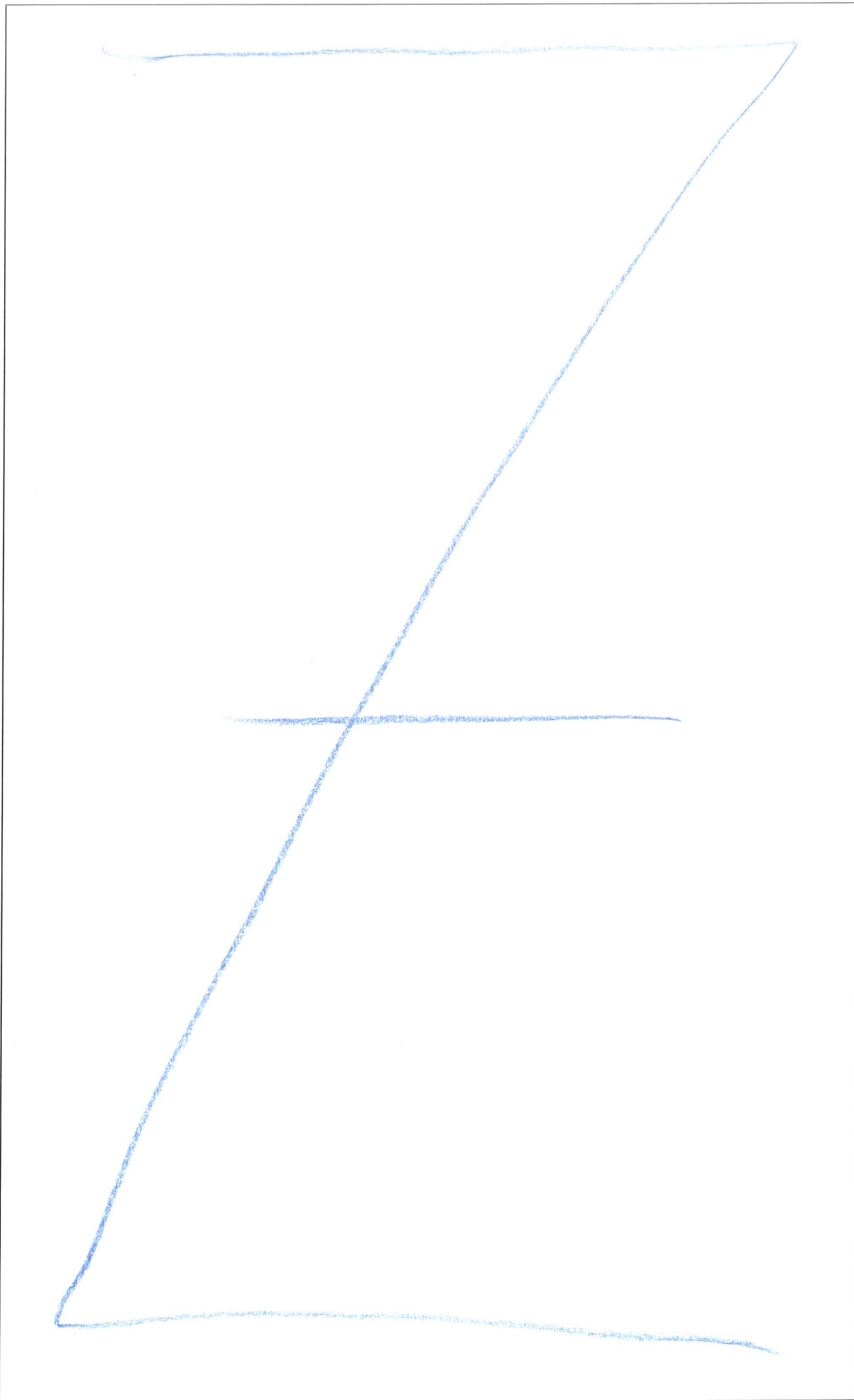
Задача. Ответ: $W = \frac{kq^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

Задача: Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 40$ см

Найти: $x_m = ?$; $x_{\text{мин}} = ?$; $d = ?$; $\frac{a}{g} = ?$

Решение: $(q, Q > 0)$. В случае, если шарики малы в сравнении с l , то сила вза электростатического взаимодействия равна $|\vec{F}_k| = \frac{kqQ}{r^2}$, где r - расстояние между ними. Изначально шарики находятся в положении неустойчивого равновесия. Значит, сумма действующих на них





Условие
Сил в проекции на ось x (вдоль наклонной поверхности) равна нулю: Стр. 3

$$0 = F_k \cos \alpha - mg \sin \alpha \Rightarrow \text{Если } 0 = \frac{kgQ}{l^2} \cos \alpha - mg \sin \alpha \Rightarrow \frac{kgQ}{l^2} = mg \tan \alpha$$

Пушня нет, применим закон сохранения энергии для шарика:
нет, т.к. скорости нулевые). $kgQ = mgl^2 \tan \alpha$, $s = \sqrt{l^2 + d^2 - 2ld \cos \alpha}$ по теореме косинусов.

$$kgQ \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{l} \right) = mg \cdot d \sin \alpha \Rightarrow mgl^2 \tan \alpha \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{l} \right) = mg \cdot d \sin \alpha$$

$$\frac{l^2}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = d \Rightarrow \frac{l}{s} - 1 = \frac{d \cos \alpha}{l} \Rightarrow \frac{l}{s} = \left(1 + \frac{d \cos \alpha}{l} \right)$$

где в квадратах: $\frac{l^2}{l^2 + d^2 - 2ld \cos \alpha} = \left(1 + \frac{d^2 \cos^2 \alpha}{l^2} + \frac{2d \cos \alpha}{l} \right)$

$$l^2 = (l^2 + d^2 - 2ld \cos \alpha) \left(1 + \frac{d^2 \cos^2 \alpha}{l^2} + \frac{2d \cos \alpha}{l} \right)$$

$$l^2 = l^2 + d^2 - 2ld \cos \alpha + d^2 \cos^2 \alpha + \frac{d^4}{l^2} \cos^2 \alpha - 2 \cdot \frac{d^3}{l} \cos^3 \alpha + \frac{2d^2 \cos^2 \alpha}{l} l^2 + 2d \cos \alpha + \frac{2d^3}{l} \cos^3 \alpha - 4d^2 \cos^2 \alpha$$

$$0 = d^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha) + \frac{d^4}{l^2} \cos^2 \alpha + \frac{2d^3}{l} \cos^3 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

$d=0$ не подходит (это та же точка, не интересуем). Поделим на d^2 :

$$0 = (1 - 3 \cos^2 \alpha) + \frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{l} \cdot d + \frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot d^2$$

(при $\alpha = 45^\circ$ $1 - 3 \cos^2 \alpha < 0$)

$$d = \frac{-\frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{l} \right)^2 + 4 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{l^2} (3 \cos^2 \alpha - 1)}}{\frac{2 \cdot \cos^2 \alpha}{l^2}}$$

минус корень не интересуем, т.к. тело пошло вверх.

$$d = l \cdot \left(-\frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{\left(\frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \right)^2 + \frac{4 \cos^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} \cdot \left(3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)} \right) =$$

$$= l \cdot \left(-\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \sqrt{\sin^4 \alpha + 2 - \tan^2 \alpha} \right) =$$

$$= l \cdot \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \right) = l \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2} = 20 \text{ см} \cdot (2,24 - 1,41) = 20 \text{ см} \cdot 0,83 =$$

Задача 4

$$d = l \left(-\frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{\left(\frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \right)^2 + \frac{4 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \left(3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)} \right) =$$

$$= l \left(-\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \sqrt{\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = l \cdot \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2 - 1} \right) =$$

$$= l \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ или } l \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = l \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \approx 20,8 \text{ см}$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x в точке отклонения:

$$m a_x = -m g \sin \alpha - \frac{k q Q}{s^2} \cdot \frac{d - l \cos \alpha}{s} \Rightarrow -m a = -m g \sin \alpha - \frac{m g l^2 \operatorname{tg} \alpha}{(d^2 + l^2 - 2 d l \cos \alpha)^{3/2}} (d - l \cos \alpha)$$

$$a = g \sin \alpha + g \cdot \frac{l^2 \operatorname{tg} \alpha}{(d^2 + l^2 - 2 d l \cos \alpha)^{3/2}} (d - l \cos \alpha)$$

$$\frac{a}{g} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{l^2 \cdot 1}{\left(l^2 + l^2 \cdot \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} - 2 l \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{3/2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} l - l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1 + \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{\left(1 + \frac{8-4\sqrt{3}}{4} - (\sqrt{3}-1) \right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{\left(1 + 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 \right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{(4-2\sqrt{3})^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}^2 - 1 - 2\sqrt{3} \right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)}{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)}{4 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\sqrt{3}-1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4 \cdot (3-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(5-\sqrt{3})}{8} \approx 0,58 \Rightarrow a = 0,58g$$

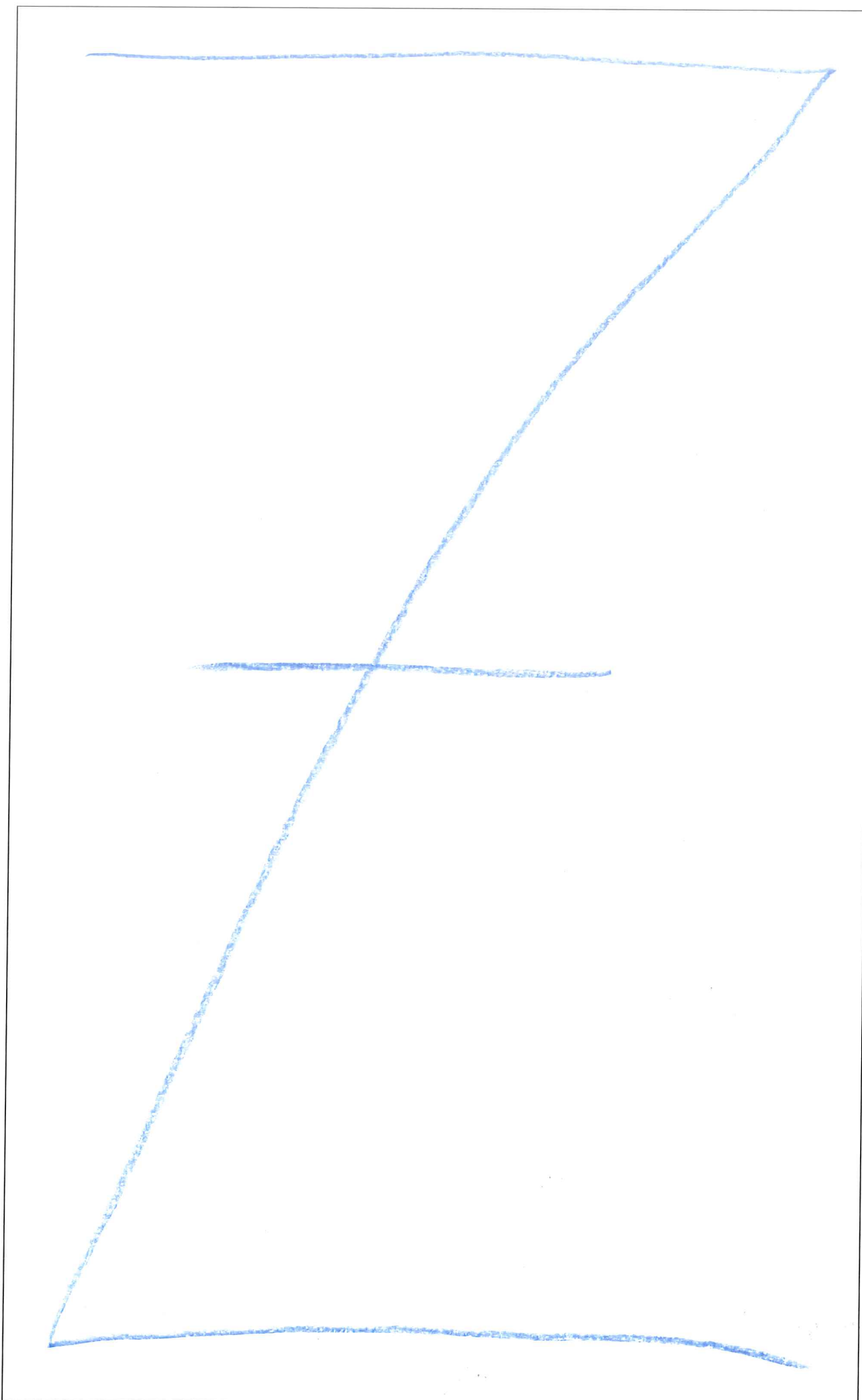
Ответ: $d = l \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \approx 20,8 \text{ см}$, $a = \frac{\sqrt{2}(5-\sqrt{3})}{8} g = 0,58g$.

Задача 2

Ответ на вопрос:

Темпоякость зависит от количества вещества, но молярные темпоякости такие: $c_v = \frac{i}{2} R$ (постоянный объем), $c_p = \frac{i+2}{2} R$ (постоянное давление), где i — кол-во степеней свободы (3 для одноатомного, 5 для двухатомного и 6 для трехатомного).

$(= c \cdot \nu) \Rightarrow c_v = c_v \cdot \nu$, $c_p = c_p \cdot \nu$.



Читовик

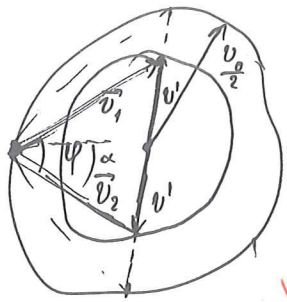
Спр. 8

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 \geq 1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{b}{2R} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow b \geq \frac{8}{5}R = 4 \text{ см}$$

Если $v_{||} \geq \frac{4}{3}u$:

$$\frac{u^2}{3} = \frac{u}{4} (v_{||}^2 - (2v')^2) \Rightarrow \frac{4}{3}u^2 = \frac{v_{||}^2}{4} - (2v')^2$$

Диаграмма такая:



$\varphi < \frac{\pi}{2}$ при любых $\Delta E > 0$, т.к.
 $v' < \frac{v_0}{2} \leq \frac{v_0}{2} = \frac{\pi}{2}$ при $b \geq \frac{8}{5}R = 4 \text{ см}$

$\varphi(0) = 0$, т.к. движется вдоль прямой,

$v' < \frac{v_0}{2}$, т.е. в одном направлении.

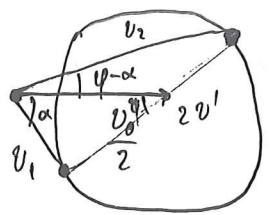
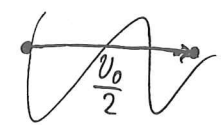
Когда $v_{||} \geq \frac{4}{3}u$?

$$v_0 \cos \alpha = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \geq \frac{4}{3}u$$

$$1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \geq \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{u}{v_0}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{2R} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{4u}{3v_0}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow b \leq \frac{6}{5}R = 3 \text{ см}$$

$$(2v') = \sqrt{v_0^2 \left(1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2\right) - \frac{4}{3}u^2}$$



$$\frac{v_1}{\sin \varphi} = \frac{v'}{\sin \alpha}$$

$$\frac{v_2}{\sin \varphi} = \frac{v'}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

$$\frac{v_0}{2} = \frac{v'}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

$$\frac{v_0}{2} = \frac{v'}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + (v')^2 + 2\left(\frac{v_0}{2}\right)v' \cos \varphi}$$

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + (v')^2 - 2\left(\frac{v_0}{2}\right)v' \cos \varphi}$$

$$(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = v_2 \cdot v_1 \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

89-12-82-34 (138.1)

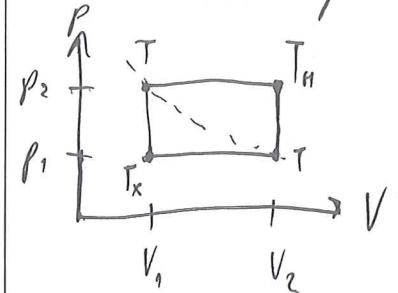
Читовик

Спр. 5

Дано: $T_x = 300 \text{ K}$, $T_H = 588 \text{ K}$
 $T_x' = 350 \text{ K}$, $T_H' = 504 \text{ K}$
 $p(V)$

Найти: $\eta_0 = ?$ без релактора
 $\eta = ?$ с релактором

Решим: Сначала рассмотрим систему без релактора.



Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для четырёх состояний:

$$\begin{cases} p_1 V_1 = \nu R T_x \\ p_2 V_2 = \nu R T_H \\ p_1 V_2 = \nu R T \\ p_2 V_1 = \nu R T \end{cases}$$

Значит, $p_1 V_2 = p_2 V_1 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}$

$$p_1 V_1 \cdot p_2 V_2 \cdot p_1 V_2 \cdot p_2 V_1 = (\nu R)^4 \cdot T_x T_H \cdot T^2$$

$$(p_1 p_2 V_1 V_2)^2 = (\nu R)^4 \cdot T_x T_H \cdot T^2$$

$$\nu R T_x \cdot \nu R T_H = (\nu R)^2 \cdot \sqrt{T_x T_H} \cdot T \Rightarrow T = \sqrt{T_x T_H} = 420 \text{ K}$$

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \nu R (T_H - T_x) - 2T = \nu R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x})^2$$

$$Q_H = \nu \cdot c_v (T - T_x) + \nu \cdot c_p (T_H - T) = \frac{3}{2} \nu R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x}) + \frac{5}{2} \nu R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x}) = \nu R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x}) \left(\frac{3}{2} \sqrt{T_x} + \frac{5}{2} \sqrt{T_H}\right)$$

$$\eta_0 = \frac{A}{Q_H} = \frac{\nu R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x})^2}{\nu R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x}) \left(\frac{3}{2} \sqrt{T_x} + \frac{5}{2} \sqrt{T_H}\right)} = \frac{\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x}}{\frac{3}{2} \sqrt{T_x} + \frac{5}{2} \sqrt{T_H}}$$

$$= \frac{\sqrt{588} - \sqrt{300}}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{300} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{588}} = \frac{4}{15 + 35} = \frac{4}{50} = 0,08 = 8\%$$

Попытаемся добавить релактор. Для него введём обозначение $\eta_0' =$

$$= \frac{\sqrt{T_H'} - \sqrt{T_x'}}{\frac{3}{2} \sqrt{T_x'} + \frac{5}{2} \sqrt{T_H'}} = \frac{0,6 \sqrt{588} - 0,5 \sqrt{300}}{\frac{3}{2} \cdot 0,5 \sqrt{300} + \frac{5}{2} \cdot 0,6 \sqrt{588}} = \frac{1}{\frac{15}{2} + \frac{30}{2}} = \frac{2}{45}$$

Чистовик

Стр. 6

Это КПД цикла реверсатора в прямом направлении (не в том, что используется). Известно, что

$$\begin{cases} A' = \eta_0' \cdot Q_H \\ A + A' = \eta_0 (Q_H + Q_H)' \end{cases}$$

Тогда этот сам КПД $\eta = \frac{A}{Q_H}$. Значит, $\eta Q_H + \eta_0' Q_H' = \eta_0 Q_H + \eta_0 Q_H'$

Тогда $A + A' = \nu R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x})^2$, $A' = \nu' R (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_x}')^2$

$$\eta = \frac{\eta_0 Q_H + \eta_0' (\eta_0 - \eta_0') Q_H'}{Q_H} = \eta_0 + (\eta_0 - \eta_0') \cdot \frac{Q_H'}{Q_H}$$

$$Q_H' \leq Q_H \Rightarrow Q_H' (1 - \eta_0') \leq (Q_H + Q_H')$$

$$Q_H' \leq Q_H \cdot Q_H = (Q_H + Q_H') (1 - \eta_0'), \quad Q_H' = Q_H' (1 - \eta_0')$$

$$Q_H' (1 - \eta_0') \leq Q_H (1 - \eta_0) + Q_H' (1 - \eta_0) \Rightarrow Q_H' (\eta_0 - \eta_0') \leq Q_H (1 - \eta_0)$$

$$\frac{Q_H'}{Q_H} \leq \frac{1 - \eta_0}{\eta_0 - \eta_0'} \Rightarrow \eta_0 \leq \eta_0 + (\eta_0 - \eta_0') \cdot \frac{1 - \eta_0}{\eta_0 - \eta_0'} = 1$$

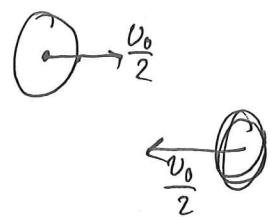
Ответ: $\eta_0 = 8\% = 0,08$

КПД второго цикла

Задача 1

Ответ на вопрос:

Перейдем в систему отсчета центра масс.



Из закона сохранения импульса после удара их скорости равны, т.к. импульс нулевой (скорости v')

Из закона сохранения кинетической энергии следует,

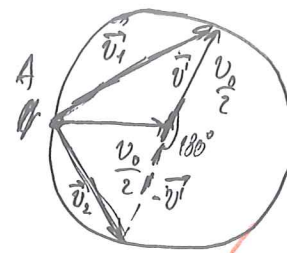
$$\text{что } v' = \frac{v_0}{2}, \text{ всего } 2 \cdot \frac{m(\frac{v_0}{2})^2}{2} = 2 \cdot \frac{m(v')^2}{2} \Rightarrow v_0 = v'$$

Или направление пока не определено.

Перейдем обратно в исходную СС.

Чистовик

Стр. 7



Векторы скорости исходят из точки А, на концы на каком-то диаметре окружности. Для v_2 точки на окружности диаметр выстроит под прямым углом $\Rightarrow v_1 \perp v_2$, раздвигаются по касательной.

ядро.

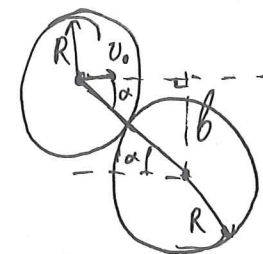
Задача

Дано: $R = 25 \text{ см}$
 $v_0 = 5 \text{ м/с}$
 $\Delta E = \frac{mv^2}{3} f(\frac{v_{||}}{u})$

Найти: $\varphi(b) = ?$
 $\varphi(R), \varphi(\sqrt{2}R), \varphi(0) = ?$
 $b - ? \varphi = \varphi_{\text{max}}$

Решение: Введем угол α :

$$\sin \alpha = \frac{b}{2R} \quad \text{Значит, } v_{||} = v_0 \cos \alpha = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2}$$



Перейдем в систему отсчета центра масс. Импульс в ней по направлению сохраняется \Rightarrow скорости у шаров в ней равны и направлены в противоположные стороны.

Затем изменим энергии для системы из двух шаров:
 $\Delta E = \left(\frac{(m+m)(\frac{v_0}{2})^2}{2} + \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2} \right) - \left(\frac{(m+m)(\frac{v_0}{2})^2}{2} - \frac{\mu (v_{\text{отн}}')^2}{2} \right)$. Скорость $v_{\text{отн}}$ неизменна и равна $\frac{v_0}{2}$, μ - приведенная масса, $\mu = \frac{m^2}{2m}$
 $= \frac{m}{2}$. Значит, $\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot (v_0 \cos \alpha)^2 - (2v')^2$

Тогда $v_{||} \leq u$, $\Delta E = 0 \Rightarrow v_{||} = v_0 \cos \alpha = 2v' \Rightarrow v' = \frac{v_{||}}{2}$, соударение упругое, угол раздвигания равен 90° .
Это при $v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \leq u \Rightarrow 1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \leq \left(\frac{u}{v_0}\right)^2$