



97-93-83-16
(182.2)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант (7-8)

Место проведения Казань
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы!
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Леошцева Данила Викторовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход вступает 12:17 - 12:19

+1 мест Ружь

+1 мест б

Дата

« 5 » апреля 2026 года

Подпись участника

Желе

97-95-83-76

(1874)

①

З ~~Ван~~ уровень 1

$$\text{до } \text{зачина} S_R = \frac{1}{4} \sqrt{n}$$

$$\text{до } \text{зачина} S_B = \frac{1}{4} \sqrt{B}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{n} = \frac{1}{4} \sqrt{B} \quad | \cdot 4$$

$$\text{или} \quad 5\sqrt{n} = \sqrt{B}$$

$$\text{до } 10:00 \quad S_R = \frac{3}{4} \sqrt{n}$$

$$\frac{3}{4} \sqrt{n}$$

$$\frac{3}{4} \sqrt{n} = \frac{3}{4 \cdot 5} \sqrt{B} = \frac{3}{20} \sqrt{B}$$

9 мин.

②

$$n(n+4001) = a^2$$

$$n \div 4 \quad \text{или} \quad n+4001 \div 4$$

$$n \div 3 \quad \text{или} \quad n+4001 \div 3$$

4001 - простое

$$n^2 + 4001n = a^2 = n^2 + 2nx + x^2 \quad x \in \mathbb{N}$$

$$4001n = 2nx + x^2$$

$$4001n = x(2n+x)$$

$$n \nmid 2n+x \Rightarrow (4001, 2n+x) > 1 \Rightarrow (4001, 2n+x) = 4001$$

②-процент

Черновик 2

$$4001n = x(2n+x)$$

$$(4001, 2n+x) = 4001$$

$$n = x \cdot \frac{2n+x}{4001}$$

$$n : x \Rightarrow (2n+x, n) = x$$

$$\frac{n}{x} = \frac{2n+x}{4001}$$

$$n = kx \Rightarrow 2kx+x = (2k+1)x = 4001$$

$$x : 4001 :$$

~~$$x = \frac{4001}{8} \cdot 4001e$$~~

~~$$n = kl \cdot 4001kl$$~~

~~$$n(n+4001) = (kl+1)4001$$~~

Z

~~$$kl(kl+1) = b^2 \ominus$$~~

~~2k+1 : 4001 где бер k : 4001 u 2n+1 : 4001 ?~~

~~$$n = 2000?$$~~

~~$$2000 \cdot 6001 = 2 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 6001$$~~

~~$$5 \cdot 6001? \ominus$$~~

Z

Z

97-93-83-76
(187.2)

Черновик 3

$$h = kx$$

$$2k+1 \div 4001$$

$$kx(kx + 4001) = k^2 x^2 + 4001 kx = (k^2 + 2k + 1)x^2 = (k+1)^2 x^2$$

$$4001 kx = x^2(2k+1)$$

$$4001k = x(2k+1)$$

(3)

25, 20, 15, 10, 5
2 1 1 1 1

6 ⇒ 6 курей

$$S = 6g + a + b$$

$$a + b \leq 18$$

$$a + b = 3$$

$$g + b = 12$$

$$c = d = 0$$

$$a + b \div 3$$

$$6g + a + b \div 9$$

$$a + b \geq 3$$

~~$$7 + 9 + 1 + 6 + 1 + 6$$~~

$$7 + \frac{9+1}{10} + 1 + 1 + 2 + 6 + 5 + 3 + 5 + b =$$

$$= 20 + 10 + 9 + b =$$

$$= 39 + b$$

$$6g + a + b - 39 - b = 30 + a$$

$$3g + b - 30 - a \div 11$$

$$g + b - a \div 11 \Rightarrow a + b \neq 3$$

$$\Leftrightarrow a + b = 12$$

$$a = 5; b = 7$$

$$abcd = 5700$$

④

Черновики №4

~~$b-a \rightarrow 4a - 5b - 5a + 3b = 2a - 2b$~~

$a-b \rightarrow 5a - 3b - 7a + 5b = -2a + 2b = -2(a-b)$

Разность $(a-b)$ умножается на (-2) .

Разность между меньшим и большим умножается на 2.

~~$\text{TB } \frac{45 \cdot 26}{2} = 45 \cdot 13 - \text{чет.}$~~

~~$\text{TB } 12a - 8b - \text{чет.}$~~

~~13 чет. и 13 нечет.~~



②

~~$2n+1 : 4001 \Rightarrow n \geq 2000$~~

~~$n^2 + 4001n = (n+2000)^2 = n^2 + 4000n + 2000^2$~~

Рассмотрим на min также n :

~~$\frac{n^2 + 4001n}{n}$~~

$(n+4001, n) = 1$ или 4001 квадрат \ominus

или $n : 4001$

$4001k \{ 4001(k+1) = 4001^2(k(k+1))$

$(n+4001, n) = 1 \Rightarrow n - \text{квадрат}$

и $n+4001 - \text{квадрат}$

$n = a^2 + 4001$
 $+ n = (a+x)^2$

$4001 = a^2 + 2ax + x^2 - a^2 = 2ax + x^2$
 $4001 = x(2a+1)$

$x=1$

07-93-83-76
(182.2)

2-предмет

Черновик 5

$4001 = x(2a+1)$
 \downarrow
 $x=1; 2a+1=4001 \Rightarrow a=2000$
 $x=4001; 2a+1=1 \Rightarrow a=0$

2) $a=0 \Rightarrow n=a^2$
 $n+4001 = a^2$

1) $n = 2000^2$ $n+4001 = 2001^2$
 $2000^2 + 4001 = 2000^2 + 4000 + 1 =$
 $= (2000+1)^2 = 2001^2$

При $n = 2000^2$

6) I группа x чел. \Rightarrow во II - $49-x$

1/3 Все собрали по А, тогда за перерыв
 $\frac{1}{3}t \geq 1$ II группа собрана бы $\frac{2}{3}A$

II группа работала $\frac{3}{2}t + t = \frac{5}{2}t$

III группа перерыв - t_1

I группа работала $\frac{4}{3}t_1 + t_1 = \frac{7}{3}t_1 =$
 $= \frac{5}{2}t + 1$

~~Черновик 6~~

~~$x \cdot \frac{4}{3} t_2 = (4g - x) \cdot \frac{3}{2} t_1$~~

~~$\frac{4}{3} x t_2 = 4g \cdot \frac{3}{2} t_1 - \frac{3}{2} x t_1$~~

~~$\frac{4x}{3} t_2 = \frac{(4g - x) \cdot 3}{2} t_1$~~

~~$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\left(\frac{4x}{3}\right)}{\left(\frac{(4g - x) \cdot 3}{2}\right)}$~~

~~$\frac{4x}{3} \cdot \frac{2}{(4g - x) \cdot 3}$~~

$\frac{4}{3} t_1 = \frac{5}{2} t_2 + 1$

~~t_1~~ - перерыв I
 ~~t_2~~ - перерыв II
 $t_1 = \left(\frac{5}{2} t_2 + 1\right) \cdot \frac{3}{4}$

$x \cdot t_1 = \frac{3}{4} A \quad 1 \leq t_2 \leq 8 \frac{4}{3}$

$(4g - x) \cdot t_2 = \frac{2}{3} A$

$\frac{x t_1}{(4g - x) t_2} = \frac{9}{8}$

$8x t_1 = 9(4g - x) t_2$

$8x \left(\frac{5}{2} t_2 + 1\right) \cdot \frac{3}{4} = 9(4g - x) t_2$

Черновик 4

⑥

$$8x \left(\frac{5}{2} t_2 + 1 \right) \cdot \frac{3}{4} = g(4g - x) t_2$$

$$(20xt_2 + 8x) \cdot \frac{3}{4} = g(4gt_2 - xt_2)$$

$$\frac{60}{4} xt_2 + \frac{24}{4} x = 441t_2 - 9xt_2$$

$$\frac{123}{4} xt_2 + \frac{24}{4} x = 441t_2$$

$$\frac{123xt_2 + 24x}{4} = 441t_2 + \frac{188}{4}$$

$$123xt_2 + 24x = 3087t_2$$

$$41xt_2 + 8x = 1029t_2$$

$$x(41t_2 + 8) = 1029t_2 \quad 4116 \overline{) 188}$$

при $t_2 = 1$:

$$49x = 1029$$

$$\begin{array}{r} 1029 \\ - 98 \\ \hline 49 \\ - 49 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49 \\ 21 \end{array}$$

при $t_2 = \frac{4}{3}$:

$$x \left(41 \cdot \frac{4}{3} + 8 \right) = 1029 \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{164 + 24}{3} \cdot x = 1029 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3$$

$$188x = 1029 \cdot 4 = 4116$$

$$x = \frac{4116}{188} = 22$$

$x = 21$

Читовин 1

Задача №1

Пусть пешеход v_1 м/ч, а велосипедист v_2 м/ч со скоростью v_2 м/ч, тогда:

1/4 ч. Т.е. $S = v_1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} v_1$

Велосипедист проехал $\frac{1}{4}$ ч. Т.е.

$S = \frac{1}{4} v_2$. До встречи они проехали одинак. расстояние $\Rightarrow \frac{1}{4} v_1 = \frac{1}{4} v_2 \quad | \cdot 4$

$$5 v_1 = v_2 \quad v_1 = \frac{1}{5} v_2$$

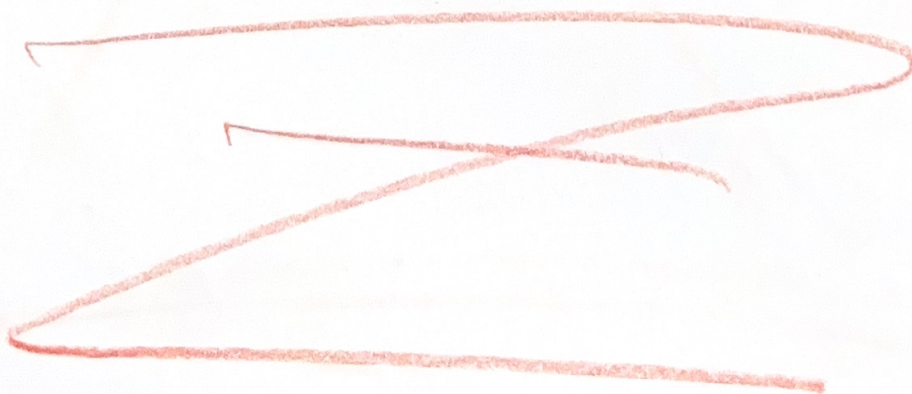
До 10:00 пешеход проедет $\frac{3}{4} v_1 =$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} v_2 = \frac{3}{20} v_2 \Rightarrow \text{Велосипедисту}$$

потребуется $\frac{3}{20} \cdot 60 \text{ мин.} = 9 \text{ мин.} \Rightarrow$

\Rightarrow ему надо выехать в 9:51.

Ответ: в 9:51



Числовые 2

Задача n2

Пусть $(a, b) = \text{НОД}(a, b)$, тогда
заметим, что $(n, n+4001) = (n, 4001) = 1$ или

т.к. 4001- простое, если $(n, 4001) = 4001$,
то $n \equiv 4001 \Rightarrow n = 4001k, k \in \mathbb{N}$

$$n(n+4001) = 4001k \cdot 4001(k+1) = 4001^2 \cdot$$

$k(k+1)$ и это квадрат $\Rightarrow k(k+1)$ - квадрат,
но этого быть не может н.к.

$(k, k+1) = 1 \Rightarrow k$ - квадрат и $k+1$ - квадрат,
но мин разности между квадратами - 3. \ominus

$$(n, 4001) = (n, n+4001) = 1$$

n - квадрат и $n+4001$ - квадрат.

Пусть $n = a^2$, а $n+4001 = (a+x)^2$, $a, x \in \mathbb{N}$, тогда:

$$\begin{aligned} n+4001 - n &= 4001 = a^2 + 2ax + x^2 - a^2 = \\ &= 2ax + x^2 = x(2a+x) \end{aligned}$$

$$4001 = x(2a+x) \text{ где } x, 2a+x \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1; 2a+x=4001 \Rightarrow a = \frac{4001-1}{2} = 2000 \\ x=4001; 2a+x=1 \Rightarrow 2a = -4000 \ominus a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n &= 2000^2 \text{ и } n+4001 = 2000^2 + 4000 + 1 = \\ &= 2001^2 \end{aligned}$$

$$n(n+4001) = 2000^2 \cdot 2001^2 = (2000 \cdot 2001)^2 \text{ и это единств. вариант.}$$

Ответ: при $n = 2000^2$

Числовик 3
Задача n 3

Заметим, что в $26!$ число 5 входит
в степени 6: $25=5^2, 20, 15, 10, 5$ по 1
разу 2 раза $4+2=6$. А число

2 входит в еще большей степени
потому что это число $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 =$
 $= 2^{10}$ \Rightarrow должно быть ровно 6
"0" на конце числа $\Rightarrow c=d=0$.

Сумма цифр в числе $- a+b+6 \cdot 9$
 $26! : 9 \Rightarrow 6 \cdot 9 + a + b : 9 \Rightarrow a+b=3$ или $a+b=12$
 $a+b \leq 18$.

Также $26! : 11 \Rightarrow$ по пр. злимности числа
на 11 сумма цифр на чет. позициях!
- сумма цифр на чет. позициях : 11
на чет. - $3 \cdot 9 + b \Rightarrow$ на чет. - $30 + a$

$$3 \cdot 9 + b - 30 + a : 11$$

$$9 + b - a : 11$$

Если $a+b=3$, то $a-b$ - чет.
 $\leq 3 \Rightarrow \ominus$

$$a+b=12 \Rightarrow b-a=2 \text{ или } 4 \text{ т.к.}$$

нег. уже 13 цифр : 11,
и разность $b-a \equiv a+b \Rightarrow$
 $\Rightarrow b-a \equiv -9$

$$a+b=12 \quad b-a=2$$

$$2b=14 \quad a=12-7=5$$

$$b=7$$

Ответ: $a=5; b=7; c=0; d=0$

Методом 4

Задача n 4

Пусть $a \equiv b \pmod{5}$, тогда
 Заметим, что $5a - 3b \equiv -3b \equiv 2b \pmod{5}$

и $7a - 5b \equiv 2a \pmod{5} \Rightarrow$ Если $a \equiv 5$, то

$7a - 5b \equiv 5$, а если нет, то и $7a - 5b \not\equiv 5$.

Аналогично с b , $5a - 3b$.

Это значит, что инвариант-кел-во
 чисел $\equiv 5$.

Умножительно их - 15, 20, 25, 30, 35, 40 - 6 шт.

В келуе - ~~2004~~, 2005, 2010, 2015, 2020,
 2025 - 5 шт.

⇐
 Такого быть не может т.к. $5 \neq 6$ -
 - противоречие \Rightarrow Такого быть не может.

Ответ: келуе.

Истовик 5
Задача 16

Пусть производительность 1 волонтера -
 P , в 1 сутки было x волонтеров \Rightarrow
 \Rightarrow во II - $49 - x$, вся работа - A , тогда:
 перерыв на обеде у I группы - t_1 , а у
 II - t_2 , тогда:

Т.к. если бы I группа работала в
 перерыв, то сделана бы $\frac{3}{4}A$ работы,
 но в перерыв она бы сделала $\frac{3}{4}A \Rightarrow$
 $\Rightarrow x P t_1 = \frac{3}{4}A \Rightarrow x P \cdot \frac{4}{3} t_1 = A \Rightarrow$

\Rightarrow I группа закончила за
 $\frac{4}{3} t_1 + t_1 = \frac{7}{3} t_1$

Аналогично со II группой:
 $(49 - x) P t_2 = \frac{2}{3}A \Rightarrow \frac{3}{2} t_2 (49 - x) P = A$

\Downarrow
 II группа закончила за

$\frac{3}{2} t_2 + t_2 = \frac{5}{2} t_2$ и это на 1 час

раньше, чем I группа $\Rightarrow \frac{4}{3} t_1 = \frac{5}{2} t_2 + 1$
 (см. след. задание)

Условие 6

Задача №6 (продолж.)

$$\left. \begin{aligned} x P t_1 &= \frac{3}{4} A \\ (49-x) P t_2 &= \frac{2}{3} A \end{aligned} \right\} :$$

$$\frac{x P t_1}{(49-x) P t_2} = \frac{9}{8}$$

$$8 x t_1 = 9(49-x)t_2$$

$$8x \cdot \frac{7}{3} t_1 = \frac{5}{2} t_2 + 1 \Rightarrow t_1 = \left(\frac{5}{2} t_2 + 1 \right) \cdot \frac{3}{4}$$

$$8x \left(\frac{5}{2} t_2 + 1 \right) \cdot \frac{3}{4} = 9 t_2 (49-x)$$

$$20x t_2 (20x t_2 + 8x) \cdot \frac{3}{4} = 9(49 t_2 - x t_2)$$

$$\frac{60}{4} x t_2 + \frac{24x}{4} = 44 t_2 - 9 x t_2 \quad | - 9 x t_2$$

$$\frac{(60 + 9 \cdot 7) x t_2 + 24x}{4} = 44 t_2 \quad | \cdot 4$$

$$123 x t_2 + 24x = \cancel{44 t_2} \quad 3087 t_2 \quad | : 3$$

$$41 x t_2 + 8x = 1029 t_2$$

$$x(41 t_2 + 8) = 1029 t_2$$

(Решим 1)

Заметим, что

будет расти x при t_2 увеличении t_2 при $x \in [21; 25]$ t_2 увеличивается

на k , тогда:

(см. след. условие)

Числовик 7
Задача №6 (продолж.)

$$x(41t_2 + 8) = 1029t_2$$

Если x не увеличивается, то:

$$x(41(t_2 + k) + 8) \geq 1029(t_2 + k)$$

$$x(41t_2 + 41k + 8) \geq 1029t_2 + 1029k$$

~~$$x(41t_2 + 8) + 41kx \geq 1029t_2 + 1029k$$~~

$$41kx \geq 1029k \quad | :k \quad (k > 0)$$

$$41x \geq 1029$$

$$x \geq \frac{1029}{41} > 25$$

$$\Leftrightarrow \text{т.к. } x = 21 < 25 \Rightarrow x < 25$$

$$\begin{array}{r} 1029 \mid 41 \\ - 82 \quad \underline{\quad} \\ 209 \quad \underline{\quad} \\ 205 \quad \underline{\quad} \\ 4 \end{array}$$

Возвращаем мин значение $t_2 = 1$:

$$x(41 + 8) = 1029 \quad (\text{почему можно считать } t_2 = 1 \text{ на частоте } 1029 \text{ Гц})$$

$$49x = 1029 \Rightarrow x = 21 \Rightarrow \text{заводится делителем 1}$$

x_{\max} будет достигаться при $t_2 = \max t_2$.

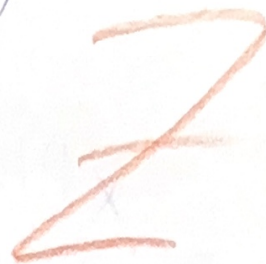
$$\max t_2 = 1 \frac{1}{3} \Rightarrow x \leq 1: \quad x(41 \cdot \frac{4}{3} + 8) = 1029 \cdot \frac{4}{3}$$

$$\max x \text{ при } t_2 = 1 \frac{1}{3}: \quad \frac{164 + 24}{3} \cdot x = 1029 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3$$

$$188x = 4116 \quad x = \frac{4116}{188} < 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21 \leq x < 22, \quad x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 21$$

Ответ: (см. след. числовик)



Условие 8

Задача №6 (продолж.)

$$x \leq 25 \text{ т.к. } \dots$$

или пусть $x > 25$, то:

$$2 \cdot 25 \cdot (41t_2 + 8) < 1029 t_2$$

$$25 - 41t_2 + 200 < 1029 t_2$$

$$25 - 41t_2 + 200 \quad \uparrow \quad 1029 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} t_2$$

$$t_2 = 1 + y, \quad y \leq \frac{1}{3}$$

$$25 \cdot 41(1+y) + 200 < 1029 \cdot (1+y)$$

$$1025(1+y) + 200 < 1029(1+y)$$

$$200 < 44(1+y)$$

$$200 \cdot 4(1+y) \leq 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3} < 200 \ominus$$

$x \leq 25 \Rightarrow$ противоречие
можно вопользоваться
леммой 1

$$x = 21 \text{ (см. предыдущий пункт)}$$

Ответ: ~~$x = 21$~~ 21 человек