0 828801 990005

82-88-01-99
(164.4)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-3

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мощевикина Андрея Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

85 (восемьдесят пять) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

82-88-01-99 (164.4)

Черновик

$a^2+b^2+1= ab+a+b$ $\quad a(a-1)+b(b-1)-ab+1=0$

$a^2+b^2-ab-a-b+1=0$

$(a+1)(b+1)=ab+a+b+1$

$a^2+b^2-(a+1)(b+1)=-2$

$(a-1)(b-1)=ab-a-b+1$

$a^2+b^2+(a-1)(b-1)-2ab=$

$=(a-b)^2+(a-1)(b-1)=0$

$a^2+b^2\geqslant 2ab$

$a;b>0$

$(a-1)(b-1)=-(a-b)^2$

$(a-1)(b-1)\leqslant 0$

~~$a\in\left[\frac{1}{4};4\right]$~~

~~$b\in\left[\frac{1}{49};49\right]$~~

$a=1$ или

$b=1$

$a\in\left[\frac{1}{2};2\right]$

$b\in\left[\frac{1}{7};7\right]$

$a=1$

$b=1$ только при $\sin x=0$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик № 1

Задача №1

Замена: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = a$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = b$

$$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = a + b - 1 - ab$$
$$\underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-(a-1)(b-1)}_{\geq 0}$$

Значит $(a-1)(b-1) \leq 0$

При этом ~~$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$~~

$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$ и $b = \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$ меньше 1 при $\sin x \in [0; 1]$, больше 1 при $\sin x \in [-1; 0)$.

Значит $(a-1)$ и $(b-1)$ обладают одинаковыми знаками всегда, значит их произведение не может быть отрицательным.

Тогда $\begin{cases} (a-1)(b-1) \geq 0 \\ (a-1)(b-1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) = 0$

$(a-1)$ или $(b-1) = 0$ при $a = 1$ или $b = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = 1$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = 1$ $\Rightarrow$ $\sin x = 0$ $\quad x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$[-315; 3{,}14]$: $-101\pi < -315 < -100\pi$,

$3{,}14 < \pi$

Значит корнями уравнения будут целые числа $\in [-100; 0]$, их 101

Ответ: 101

82-88-01-99 (164.4)

Черновик

$$x^3-(6+\sqrt5)x^2+(7+6\sqrt5)x-7\sqrt5=0$$

По обр. теор. т. Виета: , если $a,b,c$ - корни в приведенном многочлене 3 степени:

$$\begin{cases} abc=7\sqrt5 \\ a+b+c=6+\sqrt5 \\ ab+bc+ac=7+6\sqrt5 \end{cases}$$

$\sin))=\frac{h}{x}$

$\cos))=\frac{h}{6}$

$$V=(a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)(c+1)=$$
$$=abc+ac+bc+c+ab+a+b+1=$$
$$=abc+ab+bc+ac+a+b+c+1=$$
$$=7\sqrt5+7+6\sqrt5+6+\sqrt5+1=14\sqrt5+14.$$

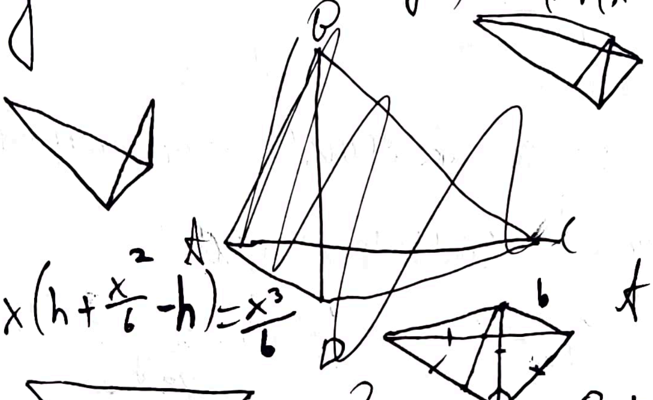
$y=h+(x-6\cdot\sin))\cdot ctg)).$

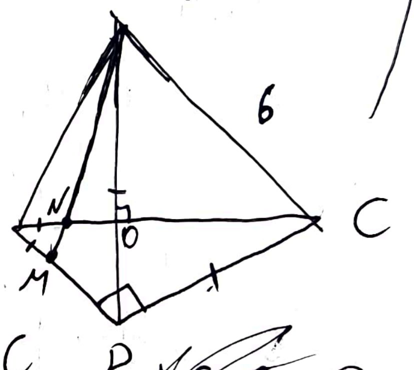
$tg))=\frac{6}{x}$

$$xy=x\cdot(h+(x-6\sin\alpha)\cdot ctg\alpha)=x\cdot\left(h+\left(x-\frac{6h}{x}\right)\cdot\frac{x}{6}\right)=$$

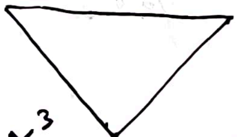
$2\alpha-1=90$

$\beta)=2\alpha-90$

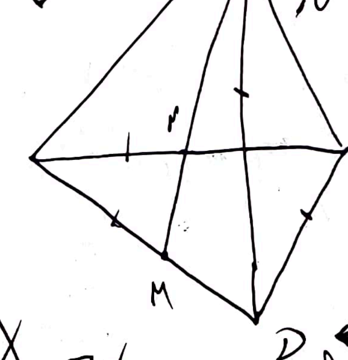




$$=x\left(h+\frac{x^2}{6}-h\right)=\frac{x^3}{6}$$



$$S=\frac{x^3}{12}$$



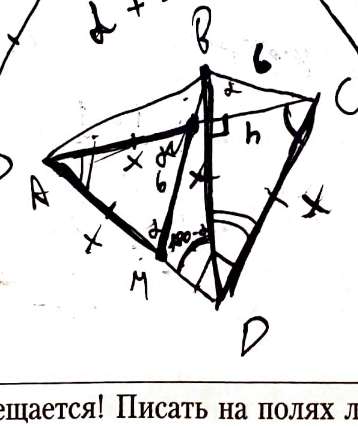
$DB=DC$

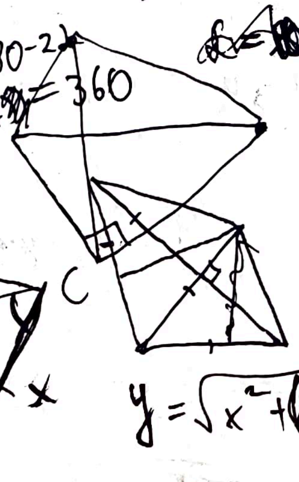
$90+\alpha+\alpha+\alpha+(180-2\alpha)+\alpha-1$

$=360$

$(180-2\alpha)+\ldots=360$

$\alpha+2\alpha+90+\ldots$





$\frac12 xy$

$y7x$

$x.$

$y=\sqrt{x^2+(AD)^2}$

Чистовик №2

Задача №2 $x^3-(6+\sqrt{5})x^2+(7+6\sqrt{5})x-7\sqrt{5}=0$

По обр. т. Виета для приведенного многочлена 3 степени с корнями $a, b, c$:

$$\begin{cases} abc = 7\sqrt{5} \\ ab+bc+ac = 7+6\sqrt{5} \\ a+b+c = 6+\sqrt{5} \end{cases}$$

Объем прямоугольного параллелепипеда считается по формуле:

$V_{\text{прямоуг. паралл.}} = (a+1)(b+1)(c+1) = abc+ab+bc+ac+a+b+c+1 =$
$= 7\sqrt{5}+7+6\sqrt{5}+6+\sqrt{5}+1 = 14\sqrt{5}+14.$

Параллелепипед обладает максимальным объемом при заданных сторонах тогда и только тогда, когда является прямоугольным.

Значит $V$ произвольного параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1 \in (0; V_{\text{прямоуг. паралл.}}]$

т.е. $(0; 14\sqrt{5}+14]$.

Ответ: $(0; 14\sqrt{5}+14]$.

Задача №4 Остаток произведения сравним с остатком произведения остатков

| $\equiv_{11}$ 1 | может ли быть составлено произведением двух остатков при :11. | остатки: |
|---|---|---|
| 1 | ✓ | 1 и 1 |
| 12 | ✓ | 6 и 2 |
| 23 | ✗ | |
| 34 | ✗ | |
| 45 | ✓ | 9 и 5 |
| 56 | ✓ | 7 и 8 |
| 67 | ✗ | |
| 78 | ✓ $39\cdot2=26\cdot3=4\cdot$[illegible] | 4 и 3 |
| 89 | ✗ | |

(✗ – означает, что разложение числа на произведение остатков (mod 11) совпадает с уже найденным)

82-88-01-99
(164.4)

Черновик

№4

$a, b.\ \overline{ab}$ или $\overline{ba}$ - простое

$\overline{1a09} \cdot \overline{683b} \equiv_{11} 1$

1-2

12

32

$1111 = 11 \cdot 101$

1112

Простые двузначные:

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,

43, 47, 53, 59,

67, 71, 73, 79, 83, 87, 89,

91, 97

одно число $\in \{1, 3, 7, 9\}$

другое - любая цифра от 1 до 9.

ни $\overline{1a09}$, ни $\overline{683b}$ не делятся на 11.

значит $a \neq 3, b \neq 1$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | ✓ | 1 и 1 |
| 12 | ✓ | 6 и 2 |
| 23 | ✗ | |
| 34 | ✗ | |
| 45 | ✓ | 9 и 5 |
| 56 | ✓ | 7 и 8 |
| 67 | ✗ | |
| 78 | ✗ | |
| 89 | ✗ | |

1 · 1,

| a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ост. | 8 | 9 | 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

$78 = 39 \cdot 2 =$

$= 13 \cdot 3 \cdot 2 =$

$= 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3$

$a = 7, b = 4$

4 и 3 $\quad a = 7, b = 4 \quad$ 47 - прост

или

$1709 \cdot 6834 \equiv_{11} 4 \cdot 3 \quad a = 6, b = 5$ сост

Чистовик №3

число $\overline{683b}$ может давать остатки:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ~~9~~ 10 при делении на 11

в зависимости от b

Построим таблицы соответствия остатков

| a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{1a09}$ (mod 11) | 8 | 9 | 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| b | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{683b}$ (mod 11) | 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

1.) 1 и 1: a = 4, b = 2 : 24, 42 – не простые

2.) 6 и 2: a = 9, b = 3 : 39 – сост, 93 – сост

или

a = 5, b = 7 : ~~57 – прост~~ 57 – сост (:3), 75 – сост

3.) 9 и 5: a = 1, b = 6 16 – сост, 61 – прост

или

a = 8, b невозможно —

4.) 7 и 8: a невозможно, b = 9 —

или

a = 0, b = 8 80 – сост.

5.) 4 и 3: a = 7 или a = 6, b = 4, b = 5 47 – прост, 74 – сост, 65 – сост, 56 – сост

~~Единственное число, которое можно составить – простое~~

Ответ: 61, 47.

Задача №5 ~~Таблица~~ сумм значений, выпавших Захару от значений на кубиках.

↓

Черновик

$\frac{1}{36}$ $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{36}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

1 2 3 4 5

$A_1)\ P = \frac{1}{12}\left(0 + 0 + \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}+\frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}\right) + \right.$

$+ \quad = \frac{180}{36\cdot 12}$

$$
\begin{array}{r}
\times\ 144 \\
12 \\
\hline
+\ 288 \\
144\phantom{0} \\
\hline
1728
\end{array}
$$

Чистовик №4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Вероятность победить у Макара, если ему выпало $n$ равна кол-ву чисел из таблицы строго меньших $n$, деленному на 36 (т.к. каждый из 36 исходов у Захара равновероятен).

Тогда если Макару выпало 1 или 2, вероятность его победы равна 0: $P_A(1)=P_A(2)=0$, если выпало 3, то $P_A(3)=\frac{1}{36}$, если 4: $P_A(4)=\frac{3}{36}$ и так далее.

А) Тогда вероятность того, что Макар выиграет после первого хода равна сумме $\sum_{i=1}^{12}\frac{P_A(i)}{12}$

$$P_A(A)=\frac{1}{12}\left(\frac{0+0+1+3+6+10+15+21+26+30+33+35}{36}\right)=$$

$$=\frac{180}{12\cdot 36}=\frac{5}{12}$$ Ответ: $\frac{5}{12}$.

Б) Найдем вероятность ничьи в одном из бросков: пусть $P_Б(i)$ - вероятность выпадения суммы $i$ у Захара - кол-во $i$ в таблице /36.

$P_Б(1)=0$, $P_Б(2)=\frac{1}{36}$, $P_Б(3)=\frac{2}{36}$ и т.д.

Чистовик №5

Тогда вероятность ничьи $P_Б(Б)$ равна аналогично ~~другому~~ предыдущим рассуждениям:

$$P_Б(Б) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{12} P_Б(i) = \frac{1}{12} \cdot \frac{(0+1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1)}{36} =$$

$$= \frac{36}{12 \cdot 36} = \frac{1}{12}$$

Вероятность того, что победитель НЕ будет выявлен после 3 бросков равна $(P_Б(Б))^3 =$

$$= \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728}$$

Если в вопросе нет опечатки, а он звучит: „Какова вероятность того, что победитель так и не будет НЕ выявлен?", тогда подразумевается вероятность выявления победителя, а она равна $1 - \frac{1}{1728} = \frac{1727}{1728}$.

Если в вопросе есть опечатка, и необходимо найти вероятность того, что победитель не будет выявлен, тогда ответ $\frac{1}{1728}$.

В) Вероятность выиграть при броске у Макара равна $P_A(A) = \frac{5}{12}$, вероятность ничьи равна $P_Б(Б) = \frac{1}{12}$.

Тогда третий исход – победа Захара:

$$P_{победы\,З} = 1 - P_A(A) - P_Б(Б) = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12}$$

Т.к. $P_{победы\,З} = \frac{1}{2} > P_{победы\,М} = P_A(A) = \frac{5}{12}$ в одном броске, то $P_{победы\,З}$ за игру в целом также будет больше.

Она состоит из суммы вероятностей трех исходов: победа З, ничья – победа З, ничья - ничья – победа З.

Чистовик №6

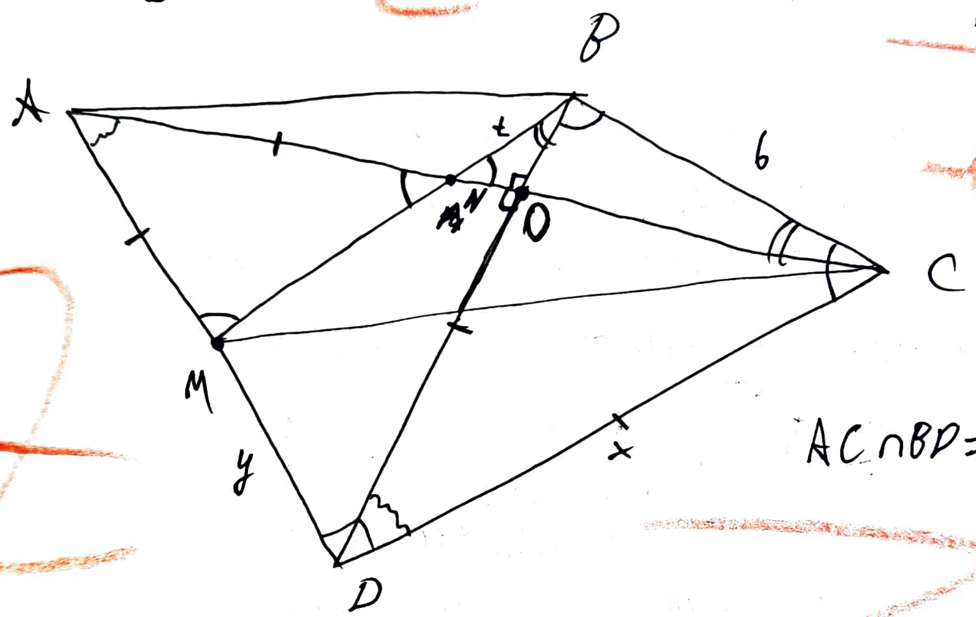
Тогда искомая вероятность победы Закира за игру

$$P_{З\ за\ игру} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{144+12+1}{288} = \frac{157}{288}.$$

Ответ: $\frac{157}{288}$

Задача №3




$AC \cap BD = \{O\}$.

∡ $\triangle AMN$ и $\triangle DCB$:

1.) $AM = DC$
2.) $AN = BD$
3.) $\angle MAN = \angle ODC$ (по $\Sigma\angle$ треугольников $\triangle ADC$ и $\triangle DOC$
$\angle MAN + \angle OCD = 90^\circ$
$\angle ODC + \angle OCD = 90^\circ$
$\Rightarrow$
$\angle MAN = \angle ODC$)

Вывод: $\triangle MAN = \triangle CDB$

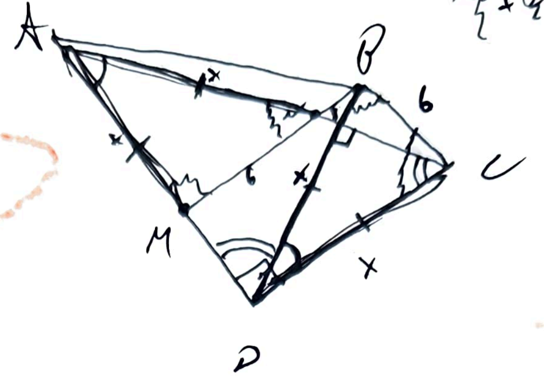
$\angle BNC = \angle ANM$ (верт).

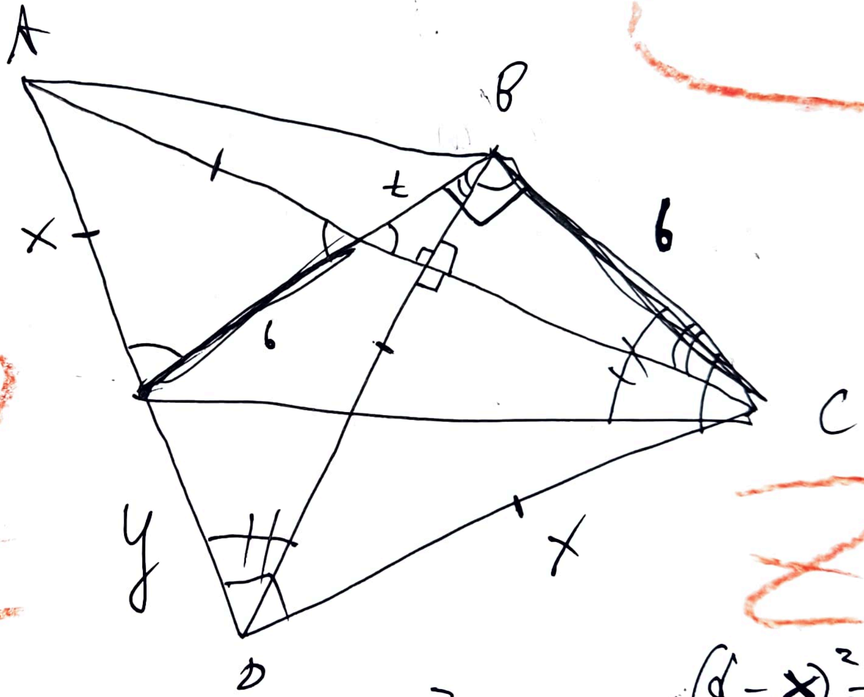
$\angle NBO = 90^\circ - \angle BNO$, $\angle BCO = 90^\circ - \angle OBC = 90^\circ - \angle BNO$

$\angle NBO = \angle BCO$. в $\triangle NBC$: по $\Sigma\angle D$

$$2\angle OBC + 2\angle NBO = 180^\circ$$

Черновик





$(d-x)^2 = t^2 + 6^2$

$(x+y)^2 + x^2 = d^2$

$6y + x$

Чистовик №7

$\angle OBC + \angle OBN = 90° = \angle NBC$

$\triangle NBC$ — прямоугольный.

В $MBCD$: $\angle MBC + \angle MDC = 90° + 90° = 180 \Rightarrow$

около $MBCD$ можно описать окружность.

По т. Птолемея в $MBCD$:

$\exists\ MD = y,\ DC = x,\ NB = t$

по т. Пифагора: $MC = \sqrt{x^2+y^2}$

$$x \cdot (6+t) + 6 \cdot y = x \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

Искомая площадь равна: $\frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = \frac{1}{2} x \cdot (x + \sqrt{t^2+6^2})$

по т. Пифагора:

$MC = \sqrt{y^2+x^2} = \sqrt{(6+t)^2+6^2}$

$x(6+t) + 6y = x \cdot \sqrt{(6+t)^2+6^2}$

$6x + xt + 6y = x\sqrt{(6+t)^2+6^2}$