0 220361 650007

22-03-61-65
(163.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Захтаренко Любови Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Подпись участника

Дата
«05» апреля 2026 года

22-03-61-65 (163.1)

черновик

$2^{2\sin x}+7^{2\sin x}+1=2\cdot 7^{\sin x}+2^{\sin x}+7^{\sin x}$ $a=2^{\sin x}$ $b=7^{\sin x}$

$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$\boxed{a^2+b^2-a-b-ab+1=0}$

$(a-b-1)(a-b)=$

$\sin x\in[-1;1]\Rightarrow a\in[\frac{1}{2};2]$ $a^2-ab+b^2=a+b-1$

$b\in[\frac{1}{7};7]$

$x^3-(10+\sqrt3)x^2-(23+10\sqrt3)x+23\sqrt3=0$ $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+ac+bc)-$

$(a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)(c+1)=abc+ab+ac+a+bc+b+c+1$

$a^2+b^2-a-b-ab+1=0$ $a=1:$ $1+b^2-1-b-b+1=0$ $(b-1)^2=0$

$b=1$ $a^2-ab+b^2=\frac{a^3+b^3}{a+b}-(a+b)+1=0$

$23a$

7930x, 7931, 7933, 7935, 7937, 7939

$7933 \mid 13$

1009 1109 1209 1309 1409 1509 1609 1709 1809

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 9

$793a \mid 11$
$77 \mid 72$
$23a$
22
$1a$

2 - 1
3 -

1609
b+09

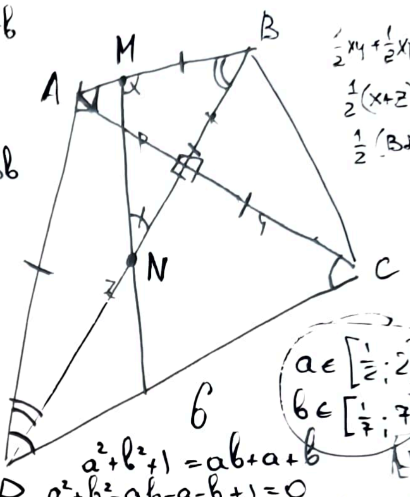
$a=b$

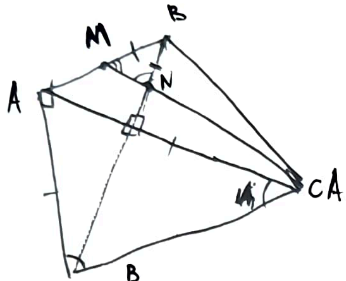
~~$a, b \to 5a-3b, 7a-5b \to 5(5a-3b)-3(7a-5b), 7(5a-3b)$~~

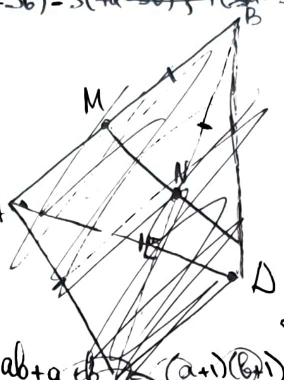
$\frac12 xy+\frac12 xp+\frac12 pz+\frac12 yz$

$\frac12(x+z)(p+y)$

$\frac12(BD\cdot AC)$







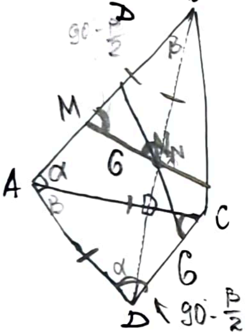
6

$a\in[\frac12;2]$
$b\in[\frac17;7]$

$a=b=1$

$a\uparrow b\downarrow$

$a^2+b^2+1=ab+a+b$
$a^2+b^2-ab-a-b+1=0$
$a^2+b^2-ab-a-b+1 \mid a+b$
a^2+b^2-ab+1
$a^2-2ab+b^2=-ab+a+b-1$
$(a-b)^2=a+b-ab-1$
$(a-1)(1-b)=a-ab-1+b$



$a^2+b^2+1=ab+a+b$ $(a+1)(b+1)-1$

$(a-1)(b-1)=ab+a-b+1$

$(a^2-1)(b^2+1)=a^2b^2-a^2$

$\boxed{(a-b)^2=(a-1)(1-b)}$

$a^2+b^2+1=ab+a+b$
$a^2-2ab+b^2=-ab+a+b-1$

$b=a+x$
$x^2=(a-1)(1-a-x)$

$-(a-1)(b-1)$
$-(a-1)(b-1):0;$

$0;\ (\frac{13}{2})^2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A) $\frac{1}{12}\cdot0+\frac{1}{12}\cdot0+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{36}$

$217 \mid 7$, $31 \mid 31$

432
432
2864
12960
17280
186624

186624

$\frac{31\cdot7}{2^4\cdot3^3}+\frac{5\cdot7^2\cdot31}{2^8\cdot3^6}+\frac{5^2\cdot7^3\cdot31}{2^{12}\cdot3^9}=$

$=\frac{31\cdot7\cdot2^8}{2\cdot1013}$

$35\cdot8=280$

2026 | 35
175 | 57
276
245
5

$2026=7a-5b$
$2025=7a-5b$
$\vdots 5$

C 15 30 40 26
15 40

$5a-3b=7a-5b-(2a-2b)=$
$7a-5b-2(a-b)$

35

Чистовик

№2

$x^3+(23+10\sqrt{3})x=(10+\sqrt{3})x^2+23\sqrt{3}$

$x^3-x^2(10+\sqrt{3})+x(23+10\sqrt{3})-23\sqrt{3}=0$ (1)

Т.к. ур-ние 3 степени имеет 3 корня, можно сказать, что (1) [redacted] можно переписать как $(x-a)(x-b)(x-c)=0$

$x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+bc+ac)-abc=0$

Значит $a+b+c=10+\sqrt{3}$, $ab+bc+ac=23+10\sqrt{3}$, $abc=23\sqrt{3}$

Объём параллелепипеда со ст. $a+1, b+1, c+1$ равен $(a+1)(b+1)(c+1)=$

$=(ab+a+b+1)(c+1)=abc+ab+ac+a+bc+b+c+1=abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c)+1.$

Т.о. $V=23\sqrt{3}+23+10\sqrt{3}+10+\sqrt{3}+1=34+34\sqrt{3}=34(1+\sqrt{3})$

Ответ: $34(1+\sqrt{3})$

№4

Рассмотрим остатки при дел. $x=\overline{793a}$ на 11 в зависимости от a, и какой ост. тогда должно иметь число $y=\overline{1b09}$ (для выполн. условия).

$$\begin{array}{l|l} 793a & 11 \\ \underline{77} & 72 \\ \quad 23a & \\ \quad \underline{22} & \\ \qquad 1a & \end{array}$$

$a=1$ → ост.x=0 → невозможно

$a=2$ → ост.x=1 → ост.y=1

$a=3$ → ост.x=2 → ост.y=6

$a=4$ → ост.x=3 → ост.y=4

$a=5$ → ост.x=4 — 3

$a=6$ — 5 — 9

$a=7$ — 6 — 2

$a=8$ — 7 — 8

$a=9$ — 8 — 7

Найдем ост. y при дел. на 11 при разных b.

$$\begin{array}{l|l} 1009 & 11 \\ \underline{99} & 91 \\ \ \ 19 & \\ \ \ \underline{11} & \\ \ \ \ 8 & \end{array}$$

Т.к. $100 \pmod{11}=1$, то с увел. b на 1 ост. увел. на 1

$$\begin{array}{l|l} 1109 & 11 \\ \underline{11} & 100 \\ \ \ 9 & \end{array}$$

$b=0$ → ост.y=8
1 — 9
2 — 10
3 — 0
4 — 1
5 — 2
6 — 3
7 — 4
8 — 5

Значит $a=1$ соотв. $b=$ X
$a=2$ — 4
$a=3$ — X
$a=4$ — 7
$a=5$ — 6
6 — 1
7 — 5
8 — 0
9 — X

Из этих чисел простыми являются 47 и 61.

Ответ: 47 и 61.

№1

Пусть $a=2^{\sin x}$; $a\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ $b=7^{\sin x}$; $b\in\left[\frac{1}{7};7\right]$

Тогда ур-ние: $a^2+b^2+1=ab+a+b$

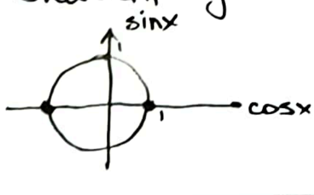
$a^2-2ab+b^2=-ab+a+b-1$

$(a-b)^2=-(a-1)(b-1)$

1) $a=b=1$: $0^2=-0\cdot0$ → подходит (при $\sin x=0$)

2) Левая часть всегда неотр., значит либо $a<1$ и $b>1$, либо $a>1$ и $b<1$.
Но тогда, с одной стороны, $\sin x<0$, а с другой, $\sin x>0$, что невозможно.

Значит единств. ответ: $a=b=1$ и $\sin x=0$



$\sin x=0$, значит $x=\pi k; k\in\mathbb{Z}$.

$-\pi<-3{,}14<0$

$100\pi<315<101\pi$

Значит в $[-3{,}14; 315]$ 101 корень.

Ответ: 101.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№6

У ~~Васи~~ Пети вероятность набрать каждое число очков от 1 до 12 равно $\frac{1}{12}$

У Васи:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1: 0   2: $\frac{1}{36}$ 3: $\frac{2}{36}$ 4: $\frac{3}{36}$

5: $\frac{4}{36}$ 6: $\frac{5}{36}$ 7: $\frac{6}{36}$ 8: $\frac{5}{36}$

9: $\frac{4}{36}$ 10: $\frac{3}{36}$ 11: $\frac{2}{36}$ 12: $\frac{1}{36}$

А) $P = \frac{1}{12}\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{3}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{6}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{10}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{15}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{21}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{26}{36} +$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$+ \frac{1}{12}\cdot\frac{30}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{33}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{35}{36} = \frac{1}{12\cdot 36}(1+3+6+10+15+21+26+30+33+35) =$

10 11 12

$= \frac{1}{12\cdot 36}(180) = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot 3} = \boxed{\frac{5}{12}}$

Б) Вероятность того, что в раунде не будет выявл. победитель, равна:

$\frac{1}{12}\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{3}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{6}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{3}{36} + \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{36} +$

$+ \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36} = \frac{1}{12\cdot 36}(0+1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1) = \frac{1}{12\cdot 36}\cdot 36 = \frac{1}{12}$

Т.к. для завершения вничью нужно, чтобы 3 раунда подряд была ничья, вероятность этого события равна $\cancel{\left(\frac{35}{432}\right)^3}$ $\boxed{\left(\frac{1}{12}\right)^3}$

В) В опред. раунде вероятность выигрыша Васи равна $1 - \frac{5}{12} - \cancel{\frac{35}{432}}\ \frac{1}{12} =$

$= \cancel{\frac{432-180-35}{432}} = \cancel{\frac{217}{432}} = \frac{1}{2}$

	Петя	Вася
① 1 раунд:	$\frac{180}{432}$	$\frac{217}{432}$
② 2 раунда:	$\frac{35}{432}\cdot\frac{180}{432}$	$\frac{35}{432}\cdot\frac{217}{432}$
③ 3 раунда:	$\left(\frac{35}{432}\right)^2\cdot\frac{180}{432}$	$\left(\frac{35}{432}\right)^2\cdot\frac{217}{432}$

~~В каждом из вариантов у Васи шанс победа выше. В сумме он равен:~~

$\frac{217}{432} + \frac{35\cdot 217}{432^2} + \frac{35^2\cdot 217}{432^3} =$

$=$

	Петя	Вася
① 1 раунд:	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$
② 2 раунд:	$\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{12}$
③ 3 раунд:	$\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{5}{12}$	$\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{6}{12}$

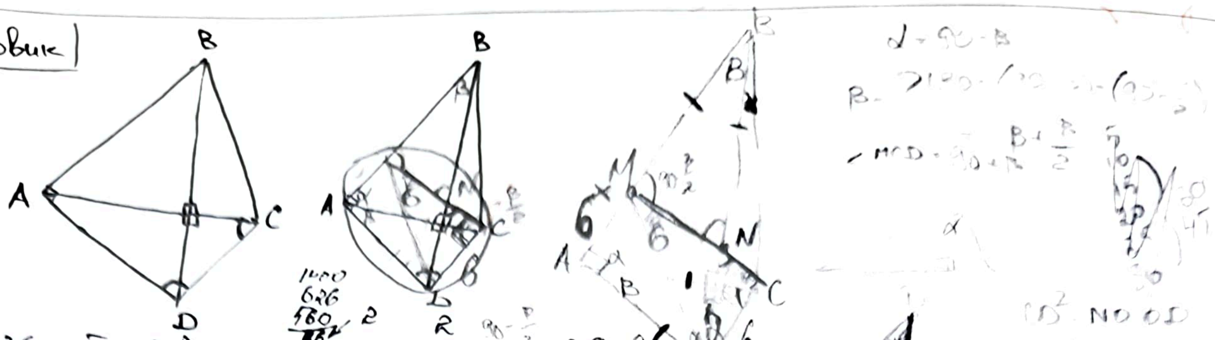
В каждом из вариантов у Васи шанс победы выше.

В сумме он равен:

$\frac{6}{12} + \frac{6}{12^2} + \frac{6}{12^3} = \frac{6\cdot 12^2 + 6\cdot 12 + 6}{12^3} =$

$= \frac{864+72+6}{12^3} = \frac{942}{12^3} = \frac{6\cdot 157}{6^3\cdot 2^3} = \frac{157}{2^3\cdot 6^2} = \boxed{\frac{157}{288}}$ У Васи

Черновик



$2026 = 5a - 3b$

$2026 + 3b = 5a$

$b \cdot 3 \pmod 5$

$x = 5a - 3b$

$y = 7a - 5b$

$2026 = 7a - 5b$

$b = 1$

$y - x = 2(a - b)$

$a - b \in [1;7]$

$\beta = 60$

$\alpha = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha = 30$

$90 + 30 + \frac{\beta}{2} + 180 - \frac{\beta}{2}$

$\frac{BO}{AK} = \frac{AB}{BD}$

$\frac{MO}{NC} = \frac{NC}{ND}$

2025 : 5

a b

15 36

не дел

дел на 5

15 20

дел

дел

144

864

18

942 | 3

314 | 2

157 |

15, 20, 25, 30, 35, 40 − 6

2005, 2000, 2015, 2020, 2025 − 5

$ND = \sqrt{y^2 + 36}$

$ND = \sqrt{(a+x)^2 + x^2} - x$

$\frac{a+x}{BO} = \frac{MD}{6+y}$

$\cancel{x+a} = \frac{MD}{BO} \cdot \frac{1}{6+y} = \frac{MD}{BD} \cdot \frac{1}{MC}$

$AB = \frac{MD}{BO}$

$(x+a)^2 = 36 + (6+y)^2$

36

288

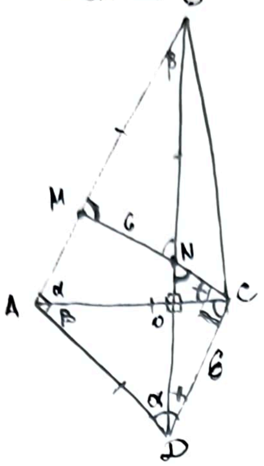
$6 \cdot 144 + 6 \cdot 12 + 6 \cdot 1 = 6 \cdot 157$

22-03-61-65 (163.1)

Чистовик

№3

AC = AD = BM = BN



1. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\alpha + \beta = 90^\circ$
2. Тогда $\angle ABD = \angle CAD = \beta$. Т.к. ~~$\triangle MBN = \triangle DAC = \beta$~~ ~~, то~~
   $\triangle MBN = \triangle DAC$ по 2 ст. и углу между, $MN = CD = 6$
3. $\angle MNB = \angle CND = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, отсюда $\angle NCA = \frac{\beta}{2}$
4. $\begin{cases} \angle NCA = \frac{\beta}{2} \\ \angle ACD = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \end{cases} \Rightarrow \angle MCD = 90^\circ$

№5

В исходном наборе было 6 чисел, дел. на 5 (15, 20, 25, 30, 35, 40). В конечном — 5 (2005, 2010, 2015, 2020, 2025). Рассмотрим, ~~что происх.~~ как меняется кол-во чисел, дел. на 5

1) $a \vdots 5,\ b \not\vdots 5 \to 5a - \underbrace{3b}_{\not\vdots 5} \not\vdots 5$, $\underbrace{7a}_{\vdots 5} - 5b \vdots 5$. ~~Число~~ Кол-во чисел, дел. на 5, не изм.
2) $a \vdots 5,\ b \vdots 5 \to 5a - 3b \vdots 5,\ 7a - 5b \vdots 5$. Не изменилось
3) $a \not\vdots 5,\ b \not\vdots 5 \to \underbrace{5a}_{\vdots 5} - \underbrace{3b}_{\not\vdots 5} \not\vdots 5,\ \underbrace{7a}_{\not\vdots 5} - \underbrace{5b}_{\vdots 5} \not\vdots 5$. Не изменилось.

Значит после произв. действий кол-во чисел, делящихся на 5, не должно было измениться, а оно уменьшилось. Значит такое не возможно.

Ответ: нет, нельзя.