



0 724793 180007

72-47-93-18

(0842)



Срок: 13:47

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс, 10Е-1

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Городи Воробьевы горы
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Родченко Артёма Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

Черновик

$$2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = (2 \cdot 7)^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

$$a^2 + b^2 - ab - a - b = -1 \quad a^2 + a(b+1) + b^2 - b + 1 = 0$$

$$a^2 + b^2 - a(b+1) - (b+1) = -2 \quad D = b^2 + b + 1 - 4(b^2 + b + 1) + 4$$

$$a(a-1) + b(b-1) - ab = a^2 + b^2 - (b+1)(a+1) = -2 \quad D = -3b^2 + 6b + 9$$

$$a(a-b) + a^2 + (a+b)^2 - 3ab - a - b = -1 \quad a = \frac{b+1 \pm \sqrt{\dots}}{2}$$

$$(a-b)^2 + ab - a - b + 1 = 0 \quad -3(b^2 - 2b + 1)$$

$$(a-b)^2 + a(b-1) - (b-1) = 0 \quad -3(b-1)^2$$

$$(a-b)^2 + (b-1)(a-1) = 0$$

$$x^3 + 2x(10 + \sqrt{3})x^2 + (23 + 10\sqrt{3})x - 23\sqrt{3} = 0$$

$$a+b+c = 10 + \sqrt{3}$$

$$ab+bc+ac = 23 + 10\sqrt{3}$$

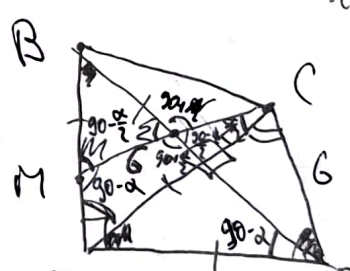
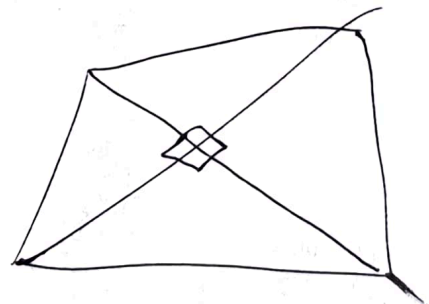
$$abc = 23\sqrt{3}$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = ?$$

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 = 33 + 34\sqrt{3} + 1 = 34(1 + \sqrt{3})$$

$\frac{1129}{21}$
 ~ 3

$$\frac{360 - 180 + \alpha}{2} =$$



$$10\sqrt{3} - 23\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 23 = 45\sqrt{3} + 23$$

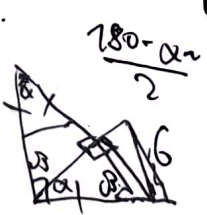
$$AC = AD$$

$$\angle A$$

$$\sin \alpha \cdot CD, DC = 6$$

н грани
если $\frac{1}{2}x$ y z : $\frac{1}{12} \cdot (\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})$

$$\rightarrow \frac{1}{12} \cdot (\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} +$$



$$36 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{36 - 2x^2}{2x^2}$$

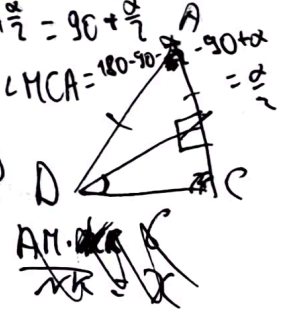
$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \frac{36 - 2x^2}{2x^2}$$

$$\angle MAC = 180 - 90 + \frac{\alpha}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2}$$

$$90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$AK = AK \cdot KD$$

$$\frac{AM}{AK} \cdot \frac{BK}{KC} = 1$$



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{MK} \cdot \frac{KC}{AC} = 1$$

$$1 - \frac{36}{2x^2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} =$$

Черныш

$$\begin{array}{r} 7930 \\ - 77 \\ \hline 23 \\ - 22 \\ \hline 11 \\ - 11 \\ \hline 0 \end{array} \quad | \quad 11$$

$$\begin{array}{r} 744 \\ - 72 \\ \hline 188 \\ - 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

3.6 3.4

(2) (3)
5.4 ≡ 2

(1) (3)
4.4 ≡ 1

11.

(0) (3)
3.4 ≡ 0

7931 ≡ 0
11
7932 ≡ 1
11

$$\begin{array}{r} 1009 \\ - 99 \\ \hline 19 \\ - 11 \\ \hline 8 \end{array} \quad | \quad 11$$

1.2 ≡ 2
11

7.1
1.2
2.2
3.1
3.2

$$\begin{array}{r} 1409 \\ - 132 \\ \hline 89 \\ - 88 \\ \hline 0 \end{array} \quad | \quad 11$$

$$\begin{array}{r} 1309 \\ - 122 \\ \hline 95 \end{array}$$

5 | 11

25

a 4b ↗
↓ ↓
5a-3b 7a-5b

15, 16, 17, ..., 40

2001, 2002, ..., 2026

40
96

40 200 - 60

140 180

140 ч. 280 - 100

180 900

4 ч

10n - 6k, 14n - 10b

4n
11n-1

4 ч

10n - 6k, 14n - 5b

4 ч

10n - 6k - b, 14n - 5b - b

4 ч

10n - 6k + b, ...

140 280

50a-3b

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

a = -2b

2a = 5b

7a =

16:18

80 - 54 = 36

112 - 90 = 22

180 - 66 = 114

252 - 110 = 142

326

1425 = 114.

5.6 / 2 = 3.5 = 15

2020
2120 - 368

5-2

6-3

7-4

8-5

9-6

4444 НННН

710 - 342 = 368

994 - 570 = 424

44 → 44

НН → НН

НН → НН

НН → 44

НН → НН, НН → НН

Числа впис

N1

$$2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = 14^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

$$a = 2^{\sin x} > 0; \quad b = 7^{\sin x} > 0$$

$$a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = 0$$

$$a^2 - a(b+1) + b^2 - b + 1 = 0$$

$$D = b^2 + 2b + 1 - 4b^2 + 4b - 4 = -3b^2 + 6b - 3 = -3(b^2 - 2b + 1) = -3(b-1)^2$$

$$a = \frac{b+1 \pm \sqrt{-3(b-1)^2}}{2}$$

т.к. $(b-1)^2 \geq 0$ а $\sqrt{-3(b-1)^2} \geq 0$ выполняется $(b-1)^2 = 0; b=1$

$$7^{\sin x} = 1$$

$$a = \frac{1+1 \pm 0}{2} = 1$$

$$\sin x = 0$$

$$2^{\sin x} = 1$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

$$x = \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$-\pi = -3,1415... < -3,14 \Rightarrow$ перв ~~ая~~ x начинается с 0, до ~~3,1415 = 3,14~~ $3,1415 < 3,15$ (подходим)

Ответ: 101 знач.

N2

$$x^3 - (10 + \sqrt{3})x^2 + (23 + 10\sqrt{3})x - 23\sqrt{3} = 0; \quad x_1, x_2, x_3 = a, b, c$$

$$a + b + c = 10 + \sqrt{3}$$

$$ab + bc + ac = 23 + 10\sqrt{3}$$

$$abc = 23\sqrt{3}$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) =$$

$$= abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 =$$

$$= 23\sqrt{3} + 23 + 10\sqrt{3} + 10 + \sqrt{3} + 1 =$$

$$= 34 + 34\sqrt{3} = 34(1 + \sqrt{3})$$

Ответ: $34(1 + \sqrt{3})$.

Числовик

№4

ab - прост, двузначное число

$$\overline{793a} \cdot \overline{1b09} \equiv 1 \pmod{11}$$

Рассмотрим какие произв. остатков даёт 1 (mod 11).

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &\equiv 1 \\ 1 \cdot 2 &\equiv 2 \\ 2 \cdot 2 &\equiv 4 \\ 3 \cdot 2 &\equiv 6 \\ 3 \cdot 3 &\equiv 9 \\ 3 \cdot 4 &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 4 &\equiv 5 \\ 4 \cdot 5 &\equiv 9 \\ 5 \cdot 5 &\equiv 3 \\ 5 \cdot 6 &\equiv \end{aligned}$$

остатки по mod 11 равные единице
дают только числа: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78,
нам подходят: 1, 12, 45, 56, 100

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 \\ 12 &= 3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 \\ 45 &= 9 \cdot 5 \\ 56 &= 8 \cdot 7 \\ 100 &= 10 \cdot 10 \end{aligned}$$

Перепишем остатки:

1) 1: a=7932, b даёт 1 mod 11.
b=1409 a=2, b=4 (1-1)
24 - не прост X

2) 12: a=3, b=9; a=7, b=5 (6-2)
39=13·3 X 75=5·5·3 X
a=93=31·3 X 57=3·19 X
a=4, b=7; a=5, b=6 (3-2)
47 - прост ✓ 56 - не прост
74 - не прост 65=5·13 X

3) 45: a=6, b=1 (5-9)
61 - прост
16=2·2·2·2 не прост

4) 56: a=8, b=0 (7-8)
80=2·5·2·2·2 - не прост, не двузнач.

5) 100: a=0, b=2 (10-10)
20 - не прост
02 - не двузнач

$$\begin{array}{r} 7931 \quad | \quad 11 \\ - 77 \\ \hline 23 \\ - 22 \\ \hline 11 \\ - 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

нет ост 9

$$\begin{array}{r} 1009 \quad | \quad 11 \\ - 99 \\ \hline 19 \\ - 17 \\ \hline 2 \end{array}$$

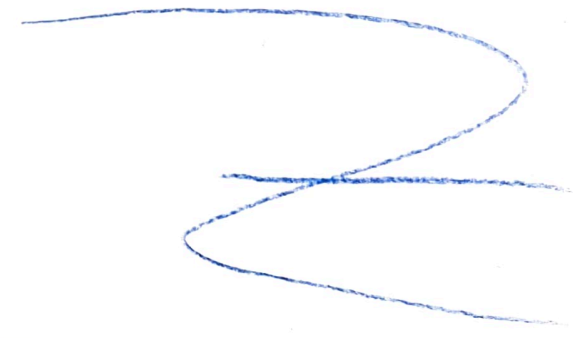
$$\begin{array}{r} 1109 \quad | \quad 11 \\ - 110 \\ \hline 9 \end{array}$$

нет ост 7

$$\begin{array}{r} 1209 \quad | \quad 11 \\ - 110 \\ \hline 109 \\ - 99 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 7930 &\equiv 10 \\ 7931 &\equiv 0 \\ 7932 &\equiv 1 \\ 7933 &\equiv 2 \\ &\vdots \\ 7939 &\equiv 8 \\ \hline 1009 &\equiv 8 \\ 1109 &\equiv 9 \\ &\vdots \\ 1909 &\equiv 6 \end{aligned}$$

Ответ: 47, 61



72-47-93-18
(1863)

N6

Числовик
у Васи сумма очков ≥ 2

А) Тема:

- 1: не подя
- 2: не подя
- 3: $\frac{1}{12} \cdot (\frac{1}{36})$
- 4: $\frac{1}{12} \cdot (\frac{2}{36})$
- 5: $\frac{1}{12} \cdot (\frac{6}{36})$
- 6: $\frac{1}{12} \cdot (\frac{10}{36})$...

$$P(H) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{15}{36} + \frac{21}{36} + \frac{28}{36} \right)$$

$$P(H) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{15}{36} + \frac{21}{36} + \frac{28}{36} + \frac{27}{36} + \frac{26}{36} + \frac{30}{36} + \frac{33}{36} + \frac{35}{36} \right) =$$

$$= \frac{1}{12 \cdot 36} (1+3+6+10+15+21+26+30+33+35) =$$

$$= \frac{180}{12 \cdot 12 \cdot 3} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Б) Тема:

вопрос стоит не будет ли выявлен \Rightarrow верно кризисы когда будет победитель.

- 1: не подя
- 2: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$
- 3: $\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{36}$
- 4: $\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{36}$

$$P(H) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \right)$$

$$P(B, H) = 1 - \frac{1}{1728} = \frac{1727}{1728}$$

$$P(H) = \frac{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{12 \cdot 36} = \frac{36}{12 \cdot 36} = \frac{1}{12}$$

$$P(3H) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{1728}$$

В) вероятность ~~во~~ победы Темы = $\frac{5}{12}$ (в раунде) \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{вероятн победы Васи} = 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{полная вероятн победы Т за 3 раунда} = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \frac{5}{12}$$

$$\text{полная вероятн победы В за 3 раунда} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

Я думаю у В больше вероятн; проверим это:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} > \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{1}{12}\right) > 0$$

это верно \Rightarrow вероятн победы В больше

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{288} = \frac{144+12+1}{288} = \frac{157}{288}$$

Ответ: А) $\frac{5}{12}$; Б) $\frac{1727}{1728}$; В) у Васи вероятн победы больше и она равна $\frac{157}{288}$.

Б) $\frac{1727}{1728}$, если же вопрос был: "когда победитель не будет выявлен?" то ответ будет $\frac{1}{1728}$.

Числовик

15, 16, 17, ..., 40 $a, b \rightarrow 5a - 3b, 7a - 5b$

2001, 2002, 2003, ..., 2026

Рассмотрим, сможем ли мы вообще получить чётные и нечётные числа.

$$a = 2n \text{ ч, } a = 2n + 1 \text{ н}$$

$$b = 2k \text{ ч, } b = 2k + 1 \text{ н}$$

$$чч \rightarrow: 10n - 6k, 14a - 10b \text{ (ч, ч)}$$

$$чн \rightarrow: 10n + 5 - 6k, 14n + 7 - 10k \text{ (н, н)}$$

$$нч \rightarrow: 10n - 6k - 3, 14n - 10k - 5 \text{ (н, н)}$$

$$нн \rightarrow: 10n + 5 - 6k - 3, 14a + 7 - 10k - 5 \text{ (ч, ч)}$$

Кажется уже есть стратегия, когда мы увеличиваем числа и из $чч \rightarrow чч$, $чн \rightarrow нн$, и если закон ч, тогда нам $нн \rightarrow чч$,

но надо проверить достигли ли мы на самом деле полученных этих чисел.

Давайте рассмотрим ситуацию когда нам удалось выписать все числа кроме последних двух многозначных если вставят чн, то будут получаться числа нн разрыв в отношении $5a - 3b, 7a - 5b$ будет сильно разбрасывать числа, а также если чётности в конце будет не подходящей, то числа невозможно получить.

Ответ: Нет.