0 836017 750009

83-60-17-75
(164,8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Большенко Татьяны Вадимовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

95 (девяносто пять) Исправлено по апелляции. 75 (семьдесят пять)

83-60-17-75 (164.8)

Чистовик 1 | №2.

По обобщённой теореме Виета:

$$\begin{cases} abc = 22\sqrt{2} \\ ab+ac+bc = 22+10\sqrt{2} \\ a+b+c = 10+\sqrt{2} \end{cases}$$

$V_{\text{прямоуг. параллелепипеда}} = (a+1)(b+1)(c+1) =$

$= abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 =$

$= 22\sqrt{2} + 22 + 10\sqrt{2} + 10 + \sqrt{2} + 1 =$

$= 22(\sqrt{2}+1) + 10(\sqrt{2}+1) + 1(\sqrt{2}+1) =$

$= (\sqrt{2}+1)(22+10+1) = (\sqrt{2}+1)\cdot 33$

$V_{\text{параллелепипеда}}$ может быть от 0 (если образующие стороны лежат в одной плоскости) до максимума, достигаемого в случае прямоуг. парал-да.

Ответ. $(0; 33(\sqrt{2}+1)]$ ($[0; 33(\sqrt{2}+1)]$, если считать вырожденный случай.)

№4. a, b - цифра

$\overline{ab}$ или $\overline{ba}$ - двузначное простое

$\Rightarrow a \neq 0$ и $b \neq 0$ (если "0" на том месте - не двузначное, на втором - не простое)

$\overline{4a89} \cdot \overline{290b} \underset{11}{\equiv} 1$

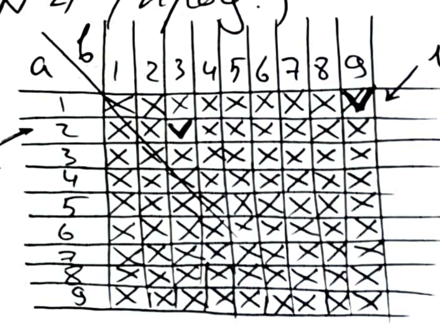
$(4089 + 100a)(2900 + b) \underset{11}{\equiv}$

$\underset{11}{\equiv} (a+8)(b+7) \equiv 1$

Составим таблицу со всеми вариантами a и b и проверим, верно ли это выраж:

Чистовик 2 |

№ 4 (прод.)



19-прост

23 простое

здесь отмечены только решения, удовл. этому выражению и составляющие простое число видим, что подходят только $\{a;b\}$: $\{1;9\}$ и $\{2;3\}$ (т.к. 19 и 23 простые)

Ответ. 19; 23; ~~[illegible]~~.

№5.

А) Чтобы Аня выиграла после первого хода, Таня должна выкинуть в сумме меньше очков, чем Аня.

1) Всего вариантов первых ходов Ани и Тани:

$12 \cdot 6 \cdot 6 = 432$

2) Вариантов, когда Аня выигрывает 1ым ходом:

Аня	Таня
12	≤11 : 35 вар
11	≤10 : 33 вар
10	≤9 : 30 вар
...	9 : 26 в.
	8 : 21 в.
	7 : 15 в.
	6 : 10 в.
	5 : 6 в.
	4 : 3 в.
	3 : 1 в.

Сложим: $(35+\cancel{30}^{15})+(30+10)+(26+3+1)+(33+21+6)=50+40+30+60=180$

Тогда вер-ть события А:

$$\frac{\cancel{180}^{\cancel{30}\,5}}{\cancel{432}_{\cancel{72}\,12}}=\frac{5}{12}$$

Б) Посчитаем вер-ть, что на одном ходу выкинули одинак. кол-во очков:

Аня	Таня
12	1 вар (6+6)
11	2 вар (5+6/6+5)
10	3 вар (4+6; 5+5; 6+4)
...	... 9: 4в, 8: 5в, 7: 6в;

6: 5в; 5: 4в; 4: 3в; 3: 2в; 2: 1в.

Итого: $15+15+6=36$ вар, которые подх.

Всего комбинаций одного хода (№5 прод.) 432 Листовик 3

$\Rightarrow P_1 = \frac{36}{432} = \frac{1}{12}$

▫ У нас три независимых события, ⇒ ~~их~~ вер-ть события Б: $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$

В) ▫ С какой вер-тью Таня выигрывает на одном ходу: $1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{12}$ — выиграла Аня; $\frac{1}{12}$ — ничья

▫ Выиграет Аня:

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{12}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144}\right)$$

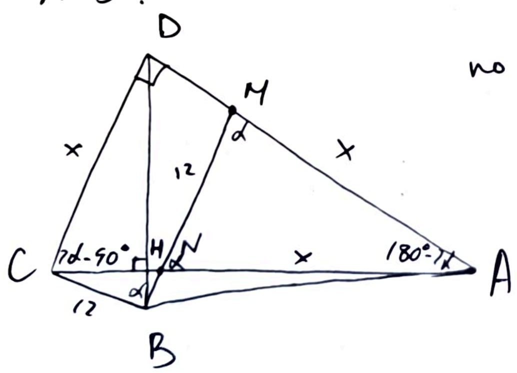
▫ Выиграет Таня:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144}\right)$$

▫ Видим, что у Тани больше вер-ть выиграть, она равна: $\frac{144+12+1}{2\cdot 144} = \frac{157}{288}$

Ответ. А) $\frac{5}{12}$; Б) $\frac{1}{1728}$; В) $\frac{157}{288}$.

№3.



1) Пусть $DB = x$ (>0)

по усл. $DB = DC = AN = AM = x$

2) Пусть $\angle MNA = \alpha$ (>0)

3) Счёт углов:

– $AM = AN \Rightarrow \angle AMN = \angle MNA = \alpha$

– В $\triangle AMN$: $\angle MAN = 180° - 2\alpha$

– В $\triangle ADC$: $\angle DCA = 180° - 180° + 2\alpha - 90° = 2\alpha - 90°$

– В $\triangle CHD$: $\angle CDB = 90° - 2\alpha + 90° = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle MAN = \angle CDB$

$\Rightarrow \triangle CDB = \triangle MAN \Rightarrow CB = MN = 12$, $\angle DCB = \angle DBC = \alpha$

– $\angle HNB = \angle MNA = \alpha$ (верт.)

– В $\triangle NHB$: $\angle HBN = 90° - \alpha \Rightarrow \angle CBN = 90° - \alpha + \alpha = 90°$

$\Rightarrow \triangle CBN$ – прямоуг.

Чистовик 4

№ 3 (прод.)

4) ~~По~~ Пусть $CH = c\ (>0)$ $\quad HN = b\ (>0)$

5) По метрическим соотн. в прямоуг. $\triangle$:

$$CD^2 = CH \cdot CA \qquad x^2 = c(c+b+x)$$
$$CB^2 = CH \cdot CN \qquad 12^2 = c \cdot (c+b) \quad \Rightarrow$$

$$x^2 = 12^2 + cx \Rightarrow c = \frac{x^2-144}{x}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{c}{12} = \frac{x^2-144}{12x} \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{(x^2-144)^2}{144x^2}$$

6) По т. косинусов для $\triangle MAN$:

$$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 12^2 - 2 \cdot x \cdot 12 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{144}{24x} = \frac{6}{x}$$

~~7) Из п.5 и п.6: $\frac{143x^2+144}{144x^2} = \frac{36}{x^2} \Rightarrow$~~
~~$143x^2+144 = 144 \cdot 36 \Rightarrow x^2 = \frac{144 \cdot 35}{143}$~~

8) Из п.5 $\Rightarrow$ $b = \frac{144-c^2}{c} = \frac{144x^2 - (x^2-144)^2}{x(x^2-144)}$

$$AC = c+b+x = \frac{144x^2-(x^2-144)^2+x^2(x^2-144)+(x^2-144)^2}{x(x^2-144)}$$
$$= \frac{x^3}{x^2-144}$$

т.к. по усл. $BD \perp AC$

9) $S_{ABCD} = BD \cdot AC = x \cdot \frac{x^3}{x^2-144} =$

~~$= \frac{144^2 \cdot 35^2}{143^2 (144 \cdot 35 -}$~~

7) Из п.5 и п.6: $\frac{144x^2-(x^2-144)^2}{144x^2} = \frac{36}{x^2}$

Пусть $x^2 = t\ (t>0)$ $\quad 144x^2-(x^2-144)^2 = 36 \cdot 144$

$$\cancel{144t} - t^2 + 288t - 144^2 = 36 \cdot 144$$
$$t^2 - 432t + 144 \cdot 180 = 0$$
$$D/4 = 216^2 - 144 \cdot 180 = 36(216 \cdot 6 - 144 \cdot 5) =$$
$$= 36 \cdot 36(36-20) = (36 \cdot 4)^2$$

Чистовик 5 |

№ 3 (прод.)

$t = \frac{2\cancel{7}6 \pm 36 \cdot 4}{1}$ $\left[\begin{array}{l} t = 360 \\ t = 72 \end{array} \right.$

Заметим, что при $x^2 = 72$ $c < 0$ => не подх

=> $x^2 = 360$

g) $\bigcirc = \frac{360^2}{360 - 144} = \frac{\cancel{360}^{10} \cdot \cancel{360}^{60}}{\cancel{216}_{6}} = 600$

Ответ. 600.

№ 1.

$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$

Пусть $a = 3^{\sin x}$ $a \in [0; 3]$

$b = 5^{\sin x}$ $b \in (0; 5]$

$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$f_1(x) = 3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1$ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$f_2(x) = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$ $T_2 = 2\pi$

т.к. степень $(\sin x)$ ≤ 1 и ≥ -1,

$f_2(x)$ на $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ возрастает быстрее, чем $f_1(x)$. Заметим, что $x = 0$ решение данного ур-ия, как и все $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. $f_2(x)$ max при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, он равен $15 + 3 + 5 = 23$

$f_1(x)$ max при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, он равен 9

Из исследования $f_1(x)$ и $f_2(x)$ => графики их ф-ий пересекаются только в $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ => решения на $[-3; 15; 314]$: $-\pi; 0; \pi; \ldots; \pi n$

$\pi n \leq 314$ < 100

$n \leq \frac{314}{\pi}$ $n \leq 99$ при проверке подх. $(99 \cdot 3{,}15 < 314)$

$\boxed{\text{Чистовик 6}}$

№1 (прод.)

Отв тогда подх. $k = -1; 0; \dots 99$ - 101 знач

Ответ. 101.

Черновик

$$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$$

$$(3^{\sin x}+5^{\sin x})^{2}+1=3\cdot 15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$$

Пусть $3^{\sin x}=a>0$ $5^{\sin x}=b>0$

$$a^2+b^2+1=ab+a+b$$

$$(a+b)^2-3ab-(a+b)+1=0$$

$$3^{\sin x}(3^{\sin x}-5^{\sin x})$$

$\sin x=1$: $9+25+1=15+3+5$ ×

$\sin x=0$: $1+1+1=1+1+1$ ✓

~~$f_1'(x)=2\cdot 3$~~ $\sin x=-1$: $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+1=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ ×

№2.

По обобщ. т. Виета

$$\begin{cases}22\sqrt{2}=abc\\ 22+10\sqrt{2}=ab+ac+bc\\ 10+\sqrt{2}=a+b+c\end{cases}$$

$c=$

$a=(10+\sqrt{2}-b-c)$

$$b=\frac{22\sqrt{2}}{ac}=\frac{22\sqrt{2}}{(10+\sqrt{2}-b-c)c}$$

$$bc(10+\sqrt{2}-b-c)=22\sqrt{2}$$

$$10bc+\sqrt{2}bc-b^2c$$

$$a=10+\sqrt{2}-\frac{22\sqrt{2}}{\cancel{10+\sqrt{2}-b-c}\ ac}-c$$

$$\frac{a^2c+22\sqrt{2}}{ac}=10+\sqrt{2}-c$$

$$22\sqrt{2}+a^2c=10ac+\sqrt{2}ac-ac^2$$

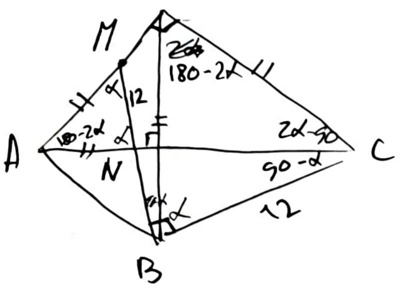
$$c\cdot a^2+a(c^2-10c-\sqrt{2}c)+22\sqrt{2}=0$$

$$D=c^4+10$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)(c+1)=$$

$$=abc+ac+bc+c+ab+a+b+1=$$

№3.



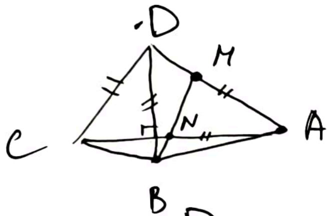
$DB = DC = AM = AN$ Черновик 2

S_{ABCD} - ? $BC = 12$

$\angle DCA = 180° - 90 - 180 + 2\alpha = 2\alpha - 90$

$\angle ACB = \alpha - 2\alpha + 90$

$\angle MBC = 90°$



$360 - 144 = 216$

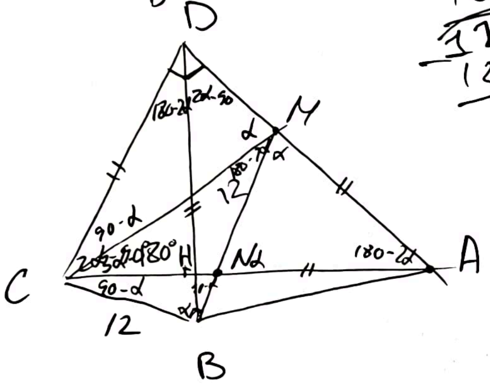
144×12: 288, 144, 1728

360×360: 216, 108, 129600, 1296, 00 | 216, 600

DCBM - впис

$144 + 13 = 157$

$72 \times 6 = 432$



$DB \cdot AC$ - ?

$\angle MCB = 2\alpha - 90°$

$\angle DCM = 2\alpha - 90° + 90° - \alpha - 2\alpha + 90° = 90° - \alpha$

$2\alpha - 90 + \angle CMB = 90°$

$\angle CMB = 180 - 2\alpha$

$\frac{CD}{DM} = tg\,\alpha$

$DM = \frac{CD\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin\alpha}$

$x^2 = x^2 + 144 - 2x \cdot 12 \cdot \cos\alpha$

$x = \frac{\cancel{144}^{12}}{\cancel{24}_{2}\cos\alpha} = \frac{6}{\cos\alpha}$

$AC = \frac{CD}{\cos 2\alpha}$

$\frac{CB}{NB} = tg\,\alpha \Rightarrow NB = CB\,ctg\,\alpha = 12\,ctg\,\alpha$

$DB = \sqrt{\frac{36}{\sin^2\alpha} +}$

$AC = \frac{x}{\cos 2\alpha} = \frac{6}{\cos\alpha(\cos 2\alpha)}$

$AC \cdot DB = x \cdot \frac{x}{\cos 2\alpha} = \frac{x^2}{\cos 2\alpha}$

$144 + 288 = 432$ | 36, 84

Черновик 3

$\overline{ab}$ или $\overline{ba}$ простое $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - н/ч \\ b - н/ч \end{array}\right.$

$\overline{4a89} \cdot \overline{290b} \underset{11}{\equiv} 1$

$4000 : 11 = 363$, ост. 7

$(4000 + a \cdot 100 + 89)(2900 + b) \underset{11}{\equiv} 1$

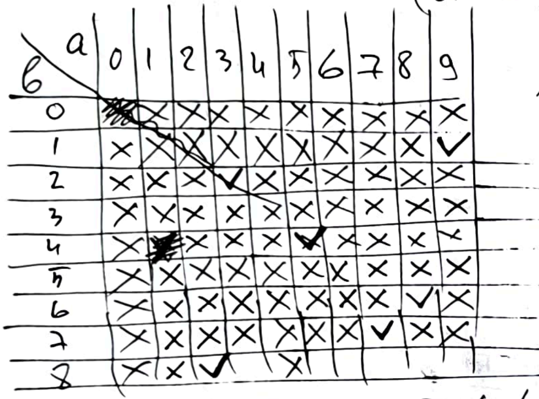
290

$(7 + a + 1)(7 + b) \underset{11}{\equiv} 1$

$(a+8)(b+7) \underset{11}{\equiv} 1$

1) нулей не может быть

2)



$16 \cdot 4 = 64$

$\boxed{19}$

$\boxed{23}$

~~45/54~~

~~86/68~~

~~77~~

~~28/82~~

$4189 \cdot 2909 = 37701$

$37701 + 8378 = 1218580\,1$

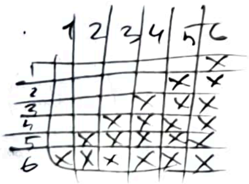
$12185801 : 11 = 110780$ ост 1

N5.

А) о сколько всего вариантов

$12 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \cdot 2 = 432$

о сколько подх:



$50 + 40 + 30 + \underbrace{27 + 33}_{60} = 180$

Аня	Таня
12:	все кроме 6и6: 35
11:	36 - 3 = 33
10:	36 - 6 = 30
9:	36 - 10 = 26
8:	36 - 15 = 21
7:	15
6:	~~7~~ ~~15~~ 10
5:	6
4:	3
3:	1

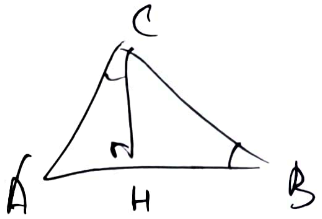
Черновик 4 | №5

Б) выкинули одинаково на одном ходу:

А	Т
12 :	1
11	2
10 :	3
9 :	4
8 :	5
7 :	6
6 :	5
5 :	4
4 :	3
3 :	2
2 :	1

$15+15+6=36$

$\frac{36}{432}=\frac{1}{12}$



$CAH \sim BAC$

$\frac{CA}{AH}=\frac{BA}{AC}$

$AC^2=AH\cdot AB$

В) Аня выиграла: ~~на Толи~~:

$\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{5}{12}$

Таня выиграла: $\frac{5}{12}$ – Аня, $\frac{1}{12}$ – ничья $\Big\} \Rightarrow \frac{1}{2}$ Таня

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$

А	Т
12	x
11	1
10 :	3
9 :	6
8 :	10
7 :	15
6 :	21
5 :	26
4 :	30
3 :	33
2 :	35
1 :	36

$\frac{50+40+30+60+36}{432}=$

$=\frac{216}{432}=\frac{1}{2}$

$CH\cdot CA_C=x^2$

1) $(c+b+x)(\cancel{b+x})=x^2$

2) $(x+a)^2=(x+b)(x+b+c)$

$12^2=c(b+c)$

$\cancel{cb+b^2+bx+cx+bx=0}$

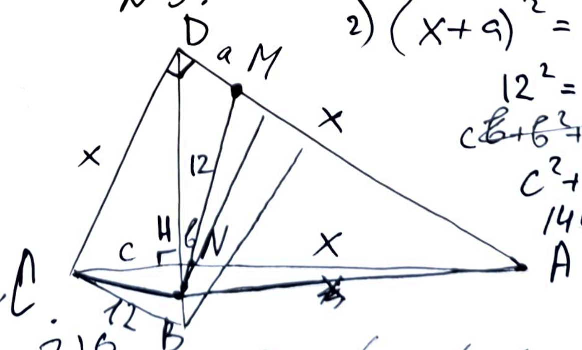
$c^2+bc+cx=x^2$

$144=bc+c^2$

$x^2-cx-144=0$

$c=\frac{x^2-144}{x}$

№3.



$CN=\frac{x(1+\sqrt{5})}{2}$

$(a+x)^2=$

$216-144=72$

$t=\frac{360}{72}$

$x^2=CN\cdot(CN+x)$

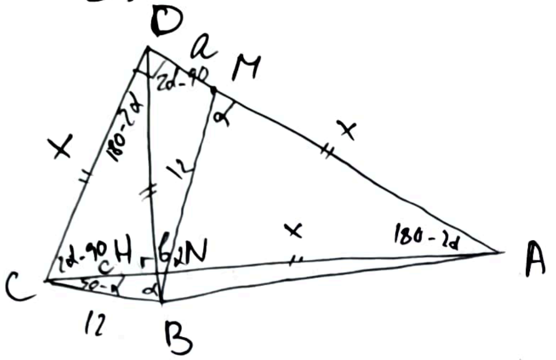
$x^2-x\cdot CN-CN^2=0$

$CAD=x^2+4x^2=(\sqrt{5}x)^2$

$CN=\frac{x\pm\sqrt{5}x}{2}$

Черновик 5

№ 3.



$S_{ABCD} = DB \cdot AC$

Пусть $DB = CD = AM = AN = x\ (>0)$

1) Пусть $\angle MNA = \alpha$ $\quad \angle MAN = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle DCA =$

$= 180 - 90 - 180 + 2\alpha = 2\alpha - 90 \Rightarrow \angle CDH = 180 - 2\alpha$

$\Rightarrow \triangle CDB = \triangle MAN \Rightarrow MN = 12$

2) $\angle CBN = 90^\circ$

3) $\left.\begin{array}{l} x^2 = c(c+b+x) \\ 12^2 = c(c+b) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - cx - 144 = 0$ $\qquad c = \dfrac{x^2-144}{x}$

$b = \dfrac{144 - \left(\dfrac{x^2-144}{x}\right)^2}{\dfrac{x^2-144}{x}} = \dfrac{144x^2 - (x^2-144)^2}{(x^2-144)x}$

4) $AC = x + \dfrac{x^2-144}{x} + \dfrac{144x^2 - (x^2-144)^2}{(x^2-144)x} =$

$= \dfrac{x^2(x^2-144) + (x^2-144)^2 + 144x^2 - (x^2-144)^2}{x(x^2-144)} =$

$= \dfrac{x^{3}}{x^2-144}$

5) $S_{ABCD} = x \cdot \dfrac{x^3}{x^2-144} = \dfrac{x^4}{x^2-144}$

$\sin\alpha = \dfrac{x^2-144}{12x}$ $\qquad \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{144x^2 - x^2 + 144}{144x^2}}$

$x^2 = x^2 + 144 - 2 \cdot x \cdot 12 \cdot \cos\alpha \Rightarrow x = \dfrac{144}{24\cos\alpha} = \dfrac{6}{\cos\alpha}$

$36 \cdot 144x^2 = (143x^2 + 144)x^2$

$143x^2 = 35 \cdot 144$

$\boxed{\text{Черновик 6}}$

№1.

$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$(a+b)^2-(a+b)=3ab-1$

$\cancel{(a+b)}(a$ $\quad a=b+x$

$2b^2+2bx+x^2+1=b^2+bx+b+x+b$

$(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2$ $\quad b^2+bx+2b+x^2-x+1=0$

$+\frac{1}{2}-ab=0$

$(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2=ab-\frac{1}{2}$ $\quad (a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$

$x^2+y^2=xy-\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ $\quad a=x+\frac{1}{2}$

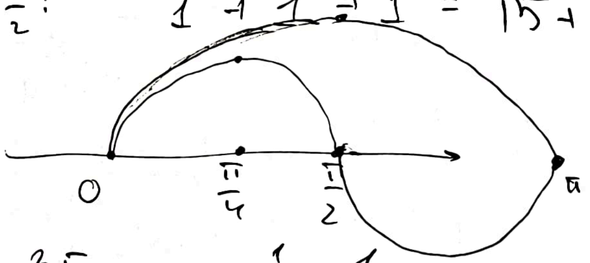
$x^2+y^2=xy+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$ $\quad xy=ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}$

ab

$x=0:\quad 1+1+1=1+1+1$

$x=\frac{\pi}{4}:\quad +3\ \cancel{4}+5+1=15^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+5^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$x=\frac{\pi}{2}:\quad 1+1+1=15+3+5$



$x=\frac{3\pi}{4}:\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1$ $\quad 3\ 9\ \vee\ 15^{\frac{3}{4}}+3^{\frac{3}{4}}+5^{\frac{3}{4}}$

$\times\ 3{,}15$
$\quad 99$
2835
2835
31185

Повысить оценку на 20 (двадцать) баллов. Старая оценка — 75 (семьдесят пять), новая оценка — 95 (девяносто пять). (Д.С. Рогонов) (Вочицкий И.В.)

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему
ученицы 11Г класса ГБОУ Школы №1580 г. Москвы
Большенко Татьяны Вадимовны

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (75) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что моё решение задачи 4 соответствует оценке „+", а не „–", как выставлено при оценивании работы. Решение в моей работе практически идентично официальному, все переходы прописаны словами, составлена таблица, отражающая все возможные варианты, из которых выбраны подходящие под выведенные уравнения пары (a;b). Моё решение, так же как и официальное, опирается на свойства делимости, все шаги верны, рассмотрены все случаи, получен правильный ответ, сопровождающийся полным обоснованием. В связи с этим прошу пересмотреть выставленный балл за задачу. Заранее благодарно.

23.04.2025