0 214260 490000

21-42-60-49
(164,7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Силаева Максима Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

21-42-60-49 (164.7)

Черновик

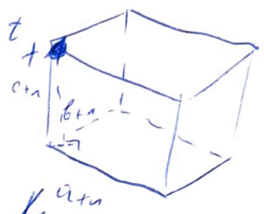
$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$

$3^{2t}+5^{2t}+1=3^t\cdot5^t+3^t+5^t$

$(3^t-1)(5^t-1)$

$\cancel{(3^t-5^t)^2=3^{2t}-2\cdot3\cdot5^t+5^{2t}}$

$15^t-3^t-5^t+$



$\cancel{3^{2t}+5^{2t}=(3^t+1)(5^t+1)-2}$

$(3^t-5^t)^2=3^{2t}-2\cdot15^t+5^{2t}$

$-1\le t\le1$

$15^t+3^t+5^t$

$3^{2t}+5^{2t}-2\cdot15^t+1+2\cdot15^t=15^t+3^t+5^t$

$(3^t-5^t)^2=-15^t+3^t+5^t-1$

$2\cdot5\sqrt2$

$(5+\sqrt2)^2=25+10\sqrt2+2$

$(3^t-5^t)^2=-(3^t-1)(5^t-1)$

$\cancel{5^{2t}-2\cdot15^t+3^{2t}}+15^t-3^t-5^t+1$

$(5^t-3^t)^2+(3^t-1)(5^t-1)=0$

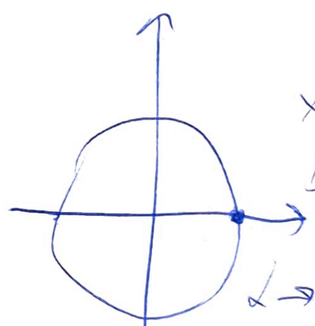
Если $t>0$, то решений нет

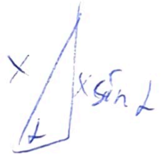
$t=0$ – решение

Если $t<0$ $\quad 5^t-3^t>0$

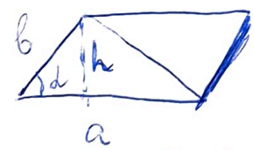
$5^t>3^t \qquad 5^t=3^t$

$t=0$





$\alpha\to0,\ \sin\alpha\to0$



$\frac12ah \qquad ah$

$\sin0=0$

$-3{,}15<-\pi \qquad \pi=3{,}1415 \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$

$h=b\sin\alpha$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$314= \qquad 100\pi=314{,}15$

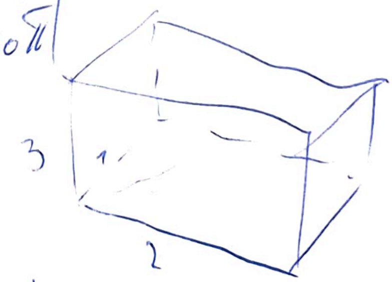
$-3{,}15<-\pi$

$314<100\pi$

$x^3+(22+10\sqrt2)x=(10+\sqrt2)x^2+22\sqrt2$

$(x-1)(x+1)(x-2)=$

$(x^2-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$



$1-1+2=-\frac{-2}{1}=2$

$-1+2-2=-\frac{1}{1}$

$-2=-\frac{2}{1}$

$\cancel{abc}\ (a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)(c+1)=abc+ac+bc+c+ab+a+b+1$

Чистовик Лист 1 из 6

Задача №1

$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$

Пусть $\sin x=t$, тогда $3^{2t}+5^{2t}+1=15^{t}+3^{t}+5^{t}$

$5^{2t}-2\cdot 15^{t}+3^{2t}+15^{t}-5^{t}-3^{t}+1=0$

$(5^{t}-3^{t})^2+(5^{t}-1)(3^{t}-1)=0$

$5^{t}-3^{t}=0 \Longleftrightarrow t=0$

$5^{t}-1=0 \Longleftrightarrow t=0$

$3^{t}-1=0 \Longleftrightarrow t=0$

Если $t>0$, то $(5^{t}-3^{t})\neq 0$ и $(5^{t}-3^{t})^2>0$, $5^{t}-1>0$ и $3^{t}-1>0$, а значит $(5^{t}-1)(3^{t}-1)>0$. Тогда всё выражение >0 и корней нет.

Если $t<0$, то $5^{t}-3^{t}\neq 0$ и $(5^{t}-3^{t})^2>0$, $5^{t}-1<0$ и $3^{t}-1<0$, а значит $(5^{t}-1)(3^{t}-1)>0$. Тогда всё выражение >0 и корней нет.

Если $t=0$, то $5^{t}=3^{t}=1$ и выражение зануляется, т.е. $t=0$ — корень.

Значит, $\sin x=0$, $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$

Т.к. $\pi\approx 3{,}146$, то $-3{,}15<-\pi$, а $314<100\pi$, значит на отрезке $[-3{,}15; 314]$ есть решения $x=-\pi, x=0, x=\pi, \dots, x=99\pi$, всего 101 решение. Ответ: 101.

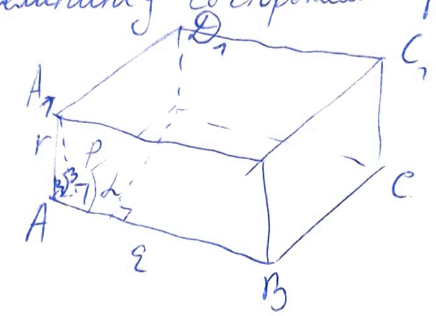
21-42-60-49
(164.7)

Чистовик   Лист 2 из 6

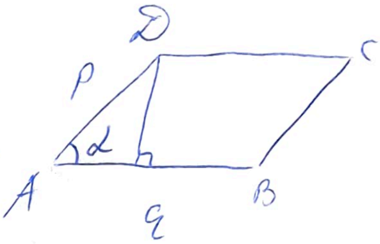
Задача №2

Расм. параллелепипед со сторонами p, q, r. Пусть V – его объем.

~~Расм.~~ грань



Расм. нижнюю грань $ABCD$ – пар-грамм.



Пусть $\angle A = \alpha$, тогда высота из т. $D = p\sin\alpha$

Тогда $S_{ABCD} = pq\sin\alpha \le pq$, причем равенство достигается при $\alpha = 90^\circ$. Другими словами, параллелограмм имеет наиб. площадь, если он явл-ся прям-ком.

Пусть $\angle(A_1A, (ABCD)) = \beta$. Тогда высота из т. A_1 на пл-ть $ABCD$ равна $r\sin\beta \le r$, где равенство достигается при $\beta = 90^\circ$.

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \cancel{pq\sin\alpha\sin}\ pqr\sin\alpha\sin\beta$

~~Тогда~~ $\cancel{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}$ Тогда $V_{max} = pqr$ при $\alpha = \beta = 90^\circ$.

При $\alpha \to 0^\circ$ и $\beta \to 0^\circ$, $\sin\alpha \to 0$ и $\sin\beta \to 0$, т.е. $V \to 0$, т.е. $V > 0$. Таким образом $0 < V \le pqr$.

Тогда возвращаясь к исходной задаче, пусть V объем паралелип., и $0 < V \le (a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$

Т.к. a, b, c корни уравнения, то по т. Виета ~~верно~~ для уравнения $x^3 - (10+\sqrt{2})x^2 + (22+10\sqrt{2})x - 22\sqrt{2} = 0$ верно:

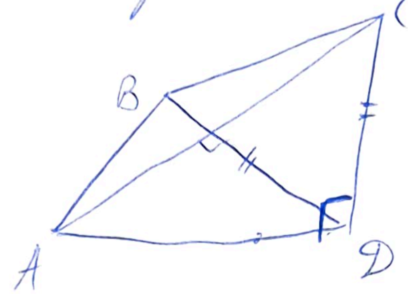
$\cancel{a+b+c=}$

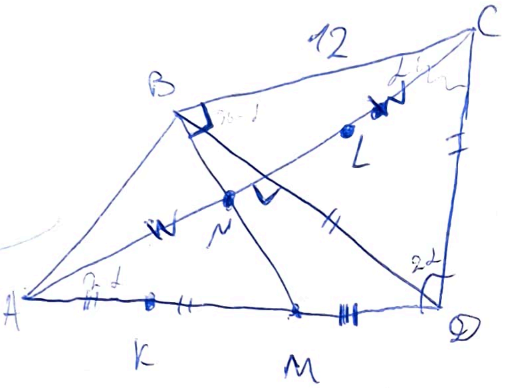
$$\begin{cases} a+b+c = 10+\sqrt{2} \\ ab+bc+ca = 22+10\sqrt{2} \\ abc = 22\sqrt{2} \end{cases}$$

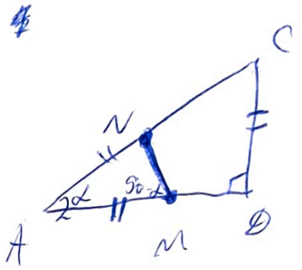
Тогда $0 < V \le 22\sqrt{2} + 22 + 10\sqrt{2} + 10 + \sqrt{2} + 1 = 33\sqrt{2} + 33$

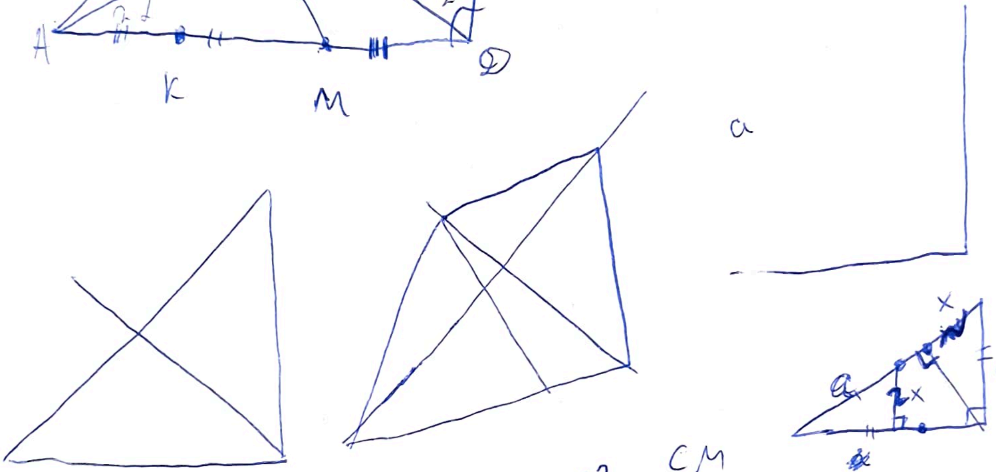
Ответ: $0 < V \le 33\sqrt{2} + 33$.

Черновик







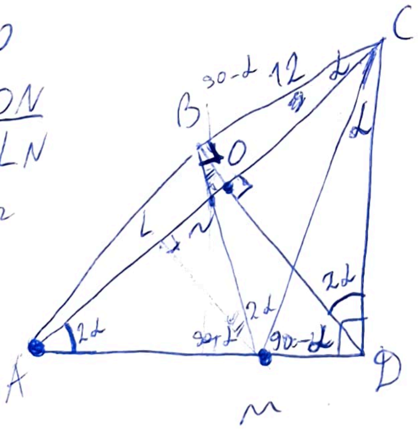


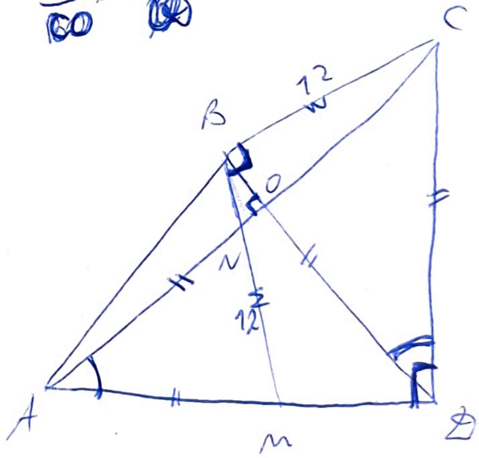
$LN = BO$

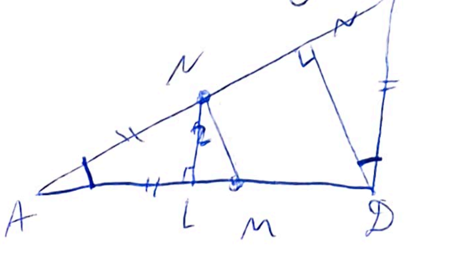
$\frac{BM}{MN} = \frac{BO}{LM} = \frac{ON}{LN}$

$LM \cdot ON = BO^2$

$\frac{12}{BO} = \frac{CM}{}$



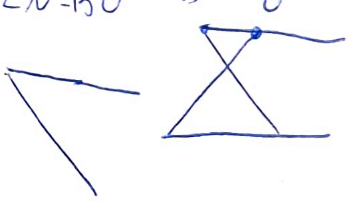




$DO^2 = 11^2 - n^2$

$AL^2 = 11^2 - n^2$

$LN = BO$



Черновик

$\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$

3 1,1

4 1,1 1,2 2,1 $\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot 3$

5 1,1 1,2 1,3 2,1 2,2 3,1

~~3,1 3,1~~

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

3

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 5 \\ \hline 245 \end{array}$$

1

3 6 11 17 22 26 29 30

~~1+2+~~

1

1+2

1+2+3

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 12 \\ \hline 288 \end{array}$$

1440+288

$\frac{1}{12}\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\right.$

1

14 4

1728

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 5 \\ \hline 720 \end{array}$$

A T

$\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot 1$

$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}(1+3+\ldots+35)$

A	T	
3	1	
4	3	2
5	6	3
6	10	4
7	15	5
8	21	6
9	26	5
10	30	4
11	33	3
12	35	2

$\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot 3$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 12 \\ \hline 70 \end{array}$$

$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 6 \\ \hline 864 \end{array}$$

2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6

$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot 2$

35

420

~~30~~ ~~35~~ 5

~~180~~

~~432~~

216

~~108~~

12

$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot 35$

4 10 20 35 56 82 112 145 180

1+3+6+10+15+21+26+30+33+35

~~1+2~~

~~12~~

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 12 \\ \hline 72 \end{array}$$

180 = 36·5

$$\begin{array}{r} + 864 \\ 72 \\ \hline 936 \end{array}$$

~~18~~ $\frac{36\cdot 5}{36\cdot 12}$

+ 936

36

432

3 6 10 15 21 26 30 33 35 36

1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1

$\frac{36}{36\cdot 12}$

~~216~~ $\frac{5\cdot 6}{2}$

785+942

$$\begin{array}{r} + 942 \\ 785 \\ \hline 1727 \end{array}$$

Чистовик Лист 3 из 6

Задача №5

Составим таблицу 6×6, где в клетке (a,b) записано число $a+b$ и означает, что в 1-й бросок Таня выкинула a очков, а во 2-й бросок b очк.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Вероятность ~~в~~ получения конкретной клетки равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

А) ~~Пу~~ Составим таблицу, где в левой колонке число очков Ани, а в правом столбце ~~число~~ кол-во клеток в таблице, в которых записано число меньшее числа очков, которое получила Аня.

1	0
2	0
3	1
4	3
5	6
6	10
7	15
8	21
9	26
10	30
11	33
12	35

Тогда вероятность победы Ани после 1-го хода равна $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot0+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot0+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot1+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot3+$

$+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot6+\ldots+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot35=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}(0+0+1+3+6+\ldots+35)=$

$=\frac{180}{432}=\frac{5}{12}$

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Б) Составим таблицу, где в левой колонке число очков Ани, а в правом столбце кол-во клеток в таблице, в которых записано именно это число. (кол-во очков Ани)

1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Тогда вероятность после 1-го хода получить одинак. кол-во очков равна $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot0+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot1+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot2+$

$+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot3+\ldots+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot1=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot(0+1+2+3+4+5+6+5+$

$+4+3+2+1)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot(\Sigma$ чисел в правом столбце$)=$

$=\frac{36}{432}=\frac{1}{12}$

~~Очевидно, что вероятность получить один~~ Очевидно, что для других ходов вероятность такая же, а значит вероятность, что 3 раза подряд ~~во~~ ~~них~~ у них получались равные суммы равна $\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{1728}$ Ответ: $\frac{1}{1728}$.

Чистовик Лист 4 из 6

Задача №5

В) Из пункта А) знаем, что вероятность победы Ани на одном конкретном ходу равна $\frac{5}{12}$.

~~Тогда вероятность проигрыша Ани на одном конкретном ходу равна $\frac{7}{12}$. Тогда общая вероятность победы Ани равна~~

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{12}^{144}+\frac{35}{144}^{12}+\frac{245}{1728}=\frac{720+420+245}{1728}$$

(победа на 1-м ходу) проигрыш на 1-м, но победа на 2-м проигрыш на 1-м и на 2-м но победа на 3-м

Также вероятность ничьи на одном конкретном ходу из пункта Б) равна $\frac{1}{12}$. Тогда вероятность проигрыша Ани на одном конкретном ходу равна $1-\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ ~~это~~

Тогда общ. вероятность победы Ани равна:

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{12}^{144}+\frac{5}{144}^{12}+\frac{5}{1728}=\frac{720+60+5}{1728}=$$

победа сразу; ничья на 1-м ходу; победа на 2-м ходу; ничьи на 1-м и 2-м; победа на 3-м

$$=\frac{785}{1728}$$

Общ. вероятность победы Тани:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{12}+\frac{6}{144}+\frac{6}{1728}=\frac{864+72+6}{1728}=\frac{942}{1728}$$

Т.к. $\frac{942}{1728}>\frac{785}{1728}$, то у Тани больше вер-ность выиграть.

Ответ: у Тани, вероятность равна $\frac{942}{1728}$.

Черновик

$\overline{ab}$ или $\overline{ba}$ простое

$\overline{4a89} = 4000 + 100 \cdot a + 80 + 9 = 4089 + 100a$

$\overline{290b} = 2900 + b$

$(4089 + 100a)(2900 + b) \equiv 1 \mod 11$

$4089 \equiv 8$

$100 \equiv 1$

$2900 \equiv 7$

$\boxed{\begin{matrix} 6+24+14=44 \\ 9+72+7=88 \end{matrix}}$

$(8 + a)(7 + b) \equiv 1 \mod 11$

$56 + 8b + 7a + ab \equiv 1 \mod 11$

$a \cdot b + 8b + 7a \equiv 0 \mod 11$

$a = 1 \quad 9b + 7 \equiv 0 \mod 11$

13 17
$a = 9 \; b = 6$

$10a + b$

$10b + a$

$56 = 11 \cdot 5 + 1$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$

15 14
$a = 4, b = 4$
$a = 6, b = 8$

$100 = 70 \cdot 76$

$b = 2$
$a = 8$

$a = 4, b = 5$

$a = 1, b = 9$

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53

$243 = 3^5$

$144 = 12^2$

$(4 \cdot 3)^2$

$2^4 \cdot 3^2$

$48 = 2 \cdot 3 \cdot 9 =$

$144 = 12 \cdot 12$

$133 = 7 \cdot 19$

$144 = 12 \cdot 12 = 9 \cdot 16$

$3 \cdot 37$

56 до 89

$4 - 0 + 8 - 1$

4081

2899

$2 + 8 - 9 + 9$

2893

$2 + 8 + 9 - 3$

$8 + 9 = 17$

$77 : 7$

$77 \cdot 16 = 102$

254 | 2, 127; 155 | 5, 31; 166 | 2, 83; 177 | 3, 59; 210 | 2, 105 | 3, 35 | 5; 288 | 2, 99 | 3; 78 | 2, 39 | 3; 232 | 2, 116 | 2, 58 | 2, 29; 122 | 2, 61; 243 | 3, 81; 111 | 3, 37; 133 | 7, 19; 221 | 7, 3; 221 | 13, 17; 4089 | 11, 371; 2900 | 11, 263; 100 | 11, 9; 127 | 7; 199 | 7; 199 | 13

Чистовик Лист 5 из 6

Задача №4

$\overline{4a89} = 4089 + 100a$

$\overline{290b} = 2900 + b$

По условию $(4089+100a)\cdot(2900+b) \equiv 1 \mod 11$

$4089 \equiv 8 \mod 11$

$2900 \equiv 7 \mod 11$

$100 \equiv 1 \mod 11$

Тогда $(8+a)(7+b) \equiv 1 \mod 11$

$\cancel{56+8b+7a+ab \equiv 1 \mod 11}$

$\cancel{ab+8b+7a \equiv 0 \mod 11}$

~~Переберем значения~~

Т.к. $0 \le a, b \le 9$, то $\cancel{(8+a)(7+}$ $56 \le (8+a)(7+b) \le 272$

Выпишем числа из этого диапазона, которые $\equiv 1 \mod 11$

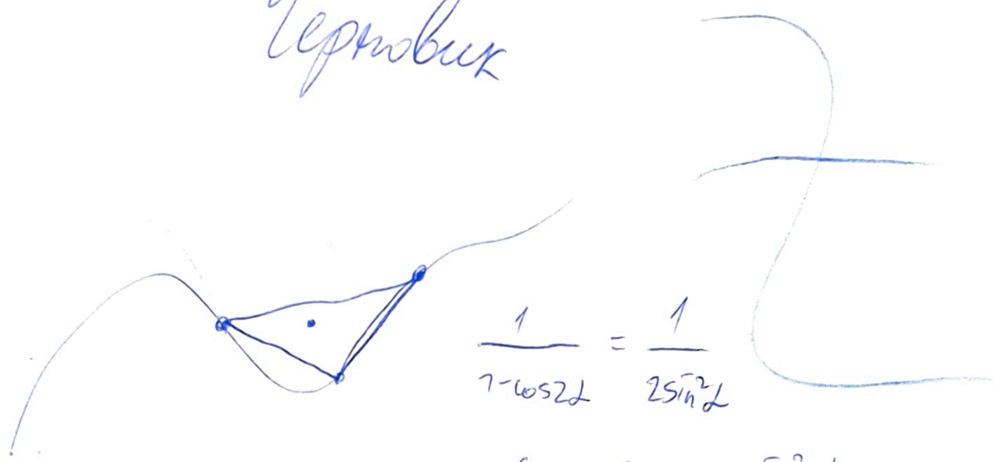
56	$a=0, b=0$ – не подходит	166
67	– простое, значит нет двух мн-телей	177
78		188
89		199
100	$a=2, b=3$ $\overline{ab}=23$ – простое	210
111		221
122		232
133		243
144	$a=1, b=9$ 19 и 91 – простые	254
155		265

Путем разложения каждого из чисел на мн-тели, проверки можно ли найти подходящие a и b, чтобы были 2 мн-теля, а затем проверки, можно ли из них составить ~~число~~ простое число было найдено всего 3 простых числа, при $a=2, b=3$ число 23 – простое

при $a=1, b=9$ числа 19 и 91 – простые

Ответ: 19, 23, 91.

Черновик



$$\frac{1}{1-\cos 2\alpha} = \frac{1}{2\sin^2\alpha}$$

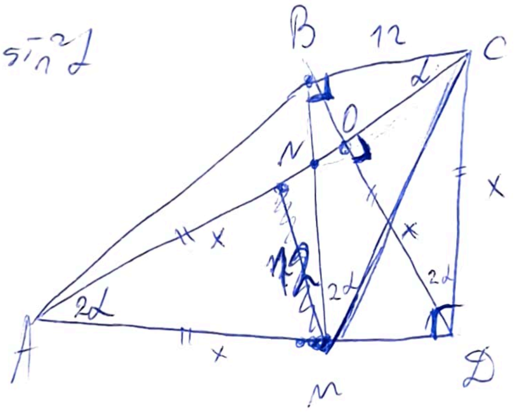
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$1 - 1 + 2$

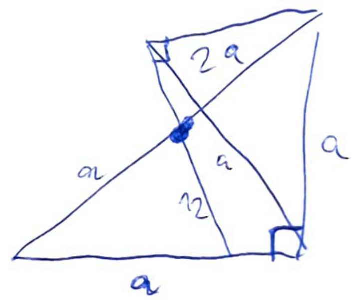
$\cos 2\alpha = \cancel{2\cos^2\alpha}\ 1 - 2\sin^2\alpha$

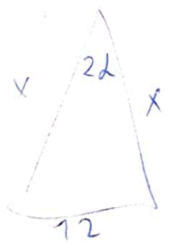
$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$1 - \sin^2\alpha$



$a \cdot 3a = 3a^2$





$$\frac{a}{\sin(90+\alpha)} = CM$$

$x^2 + x^2 - 2x^2\cos 2\alpha = 144$

$2x^2(1-\cos 2\alpha) = 144$

$$x^2 = \frac{72}{1-\cos 2\alpha}, \quad x = \sqrt{\frac{72}{1-\cos 2\alpha}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}$$

$$12 \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$CN = \frac{12}{\sin\alpha} \qquad \frac{1}{2}\cdot x \cdot \left(\sqrt{\frac{72}{1-\cos 2\alpha}}\right.$$

$2a^2(1-\cos 2\alpha) = 144$

$9a^2 - a^2 = 8a^2$

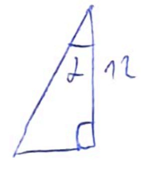
$$\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2}\cdot x \cdot \left(x + \frac{12}{\sin\alpha}\right)$$

$2a\sqrt{2}$

$$\frac{36}{1-\cos 2\alpha} + \frac{36\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}\,\sin\alpha} \qquad \frac{1}{2}x^2 + \frac{6x}{\sin\alpha}$$

$$BN = CM = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$\frac{18}{\sin^2\alpha} + \frac{36\sqrt{2}}{\sin^2\alpha}$$

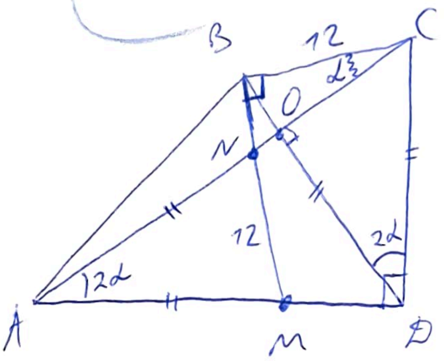


ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

7

Чистовик Лист 6 из 6

Задача №3



Пусть $\angle A = 2\alpha$. Т.к. $\angle D = 90^\circ$ и $\angle AOD = 90^\circ$, где т. $O = AC \cap BD$, то $\angle CDO = 2\alpha$.

Тогда $\triangle ANM = \triangle DBC$ по 2-м сторонам и углу между ними.

Тогда $\angle NMA = \angle BCD = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle NMD = 180^\circ - \angle NMA = 90^\circ + \alpha$

И $\angle BCD + \angle NMD = 90^\circ - \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow BCDM$ вписан $\Rightarrow$ $\angle MBC = 90^\circ$. $\angle ANM = \angle BNC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle BCN = \alpha$.

Пусть $AM = AN = BD = CD = a$.

По т. косинусов для ~~$\triangle ANM$~~ $\triangle BCD$: $2a^2 - 2a^2\cos 2\alpha = 144$

$$a^2 = \frac{72}{1-\cos 2\alpha} = \frac{72}{2\sin^2\alpha} = \frac{36}{\sin^2\alpha} \Rightarrow a = \frac{6}{\sin\alpha},$$ ~~т.к. ...~~ т.к. $2\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$.

Из $\triangle BNC$: $CN = \frac{12}{\sin\alpha} = 2a$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOD = \frac{1}{2}\cdot(AN + CN)\cdot BD \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3a \cdot a = \frac{3}{2}a^2.$$

Также $NM = 12$.

Из $\triangle ACD$: $DM = 2a\sqrt{2} - a = a(2\sqrt{2} - 1)$.

Тогда $CM^2 = a^2 + a^2(9 - 4\sqrt{2})$

По т. синусов $\frac{a}{\sin(90+\alpha)} = CM$ (т.к. CM – диаметр)

$$CM = \frac{a}{\cos\alpha},\quad CM^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha} = a^2(10 - 4\sqrt{2}) \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 10 - 4\sqrt{2}$$

~~$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$~~

$\cos^2\alpha = \frac{1}{10 - 4\sqrt{2}}$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{10-4\sqrt{2}}$

Отсюда находим a