0 383352 930004

38-33-52-93
(163.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Киселева Михаила Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«05» 04 2026 года

Подпись участника
Киселев

Чистовик 1

№1

$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$

$3^{\sin x} = a$

$5^{\sin x} = b$

$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b.$

$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$

$\left(\frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}b^2 - b + \frac{1}{2}\right) = 0$

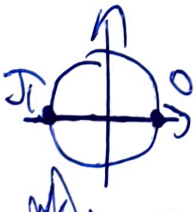
$\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 = 0$

$\underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(a-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b-1)^2}_{\geq 0} = 0$

$\begin{cases} a = b \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = b \\ a = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3^{\sin x} = 1 \\ 3^{\sin x} = 5^{\sin x} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$

$\sin x = 0$



$\boxed{x = \pi n,\ n \in Z}$

$-3{,}15 \leq \pi n \leq 3{,}14$ $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$

$-\frac{3{,}15}{\pi} \leq n \leq \frac{314}{\pi}$ $99 < \frac{314}{3{,}15} \leq \frac{314}{\pi} \leq \frac{314}{3{,}14} = 100$

$3{,}15 \times 99 = 315 - 3{,}15 = 3{,}13{,}5$

$-1{,}\dots \leq n \leq 99{,}\dots$ ~~100~~

$n \in Z$, т.е. может принимать целые значения от -1, до 99, ~~101~~ Ответ 101 решение.

Чистовик №2 2

$$x^3+(22+10\sqrt{2})x=(10+\sqrt{2})x^2+22\sqrt{2}$$

$$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$$

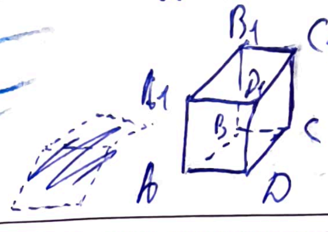
Для $x^3+ax^2+bx+c=0$, где x_1, x_2, x_3 корни, по теореме Виета $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$, $x_1x_2x_3=-c$

тогда для исходного уравнения

$$\begin{cases} abc=22\sqrt{2} \\ ab+bc+ac=22+10\sqrt{2} \\ a+b+c=10+\sqrt{2} \end{cases}$$

$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ac+$
$+a+b+c+1=22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}+1=$
$=33\sqrt{2}+33$

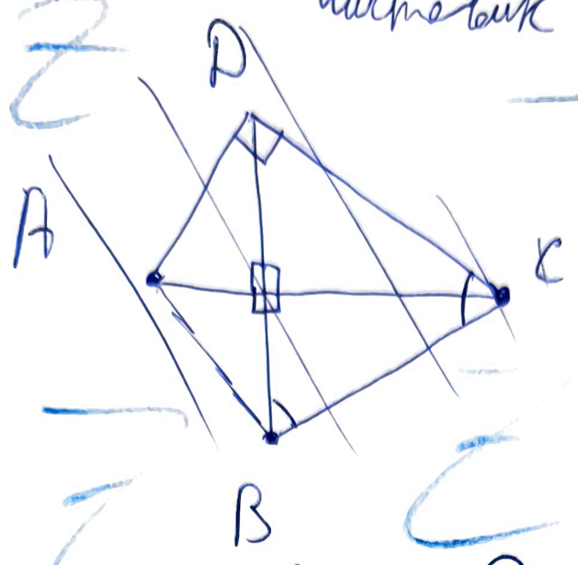
Объем ~~такого~~ ~~параллелепипеда~~ ~~равен произведению~~ параллелепипеда с заданными сторонами максимальный, когда ~~a~~ параллелепипед прямоугольный, в этом случае, его V равен произведению 3 сторон, в нашем случае $(a+1)(b+1)(c+1)=33\sqrt{2}+33$ и V может принимать любое значение из $(0; 33\sqrt{2}+33]$, т.к $V>0$ и можем делать α сколь угодно малым



$\angle B_1AD=\alpha$

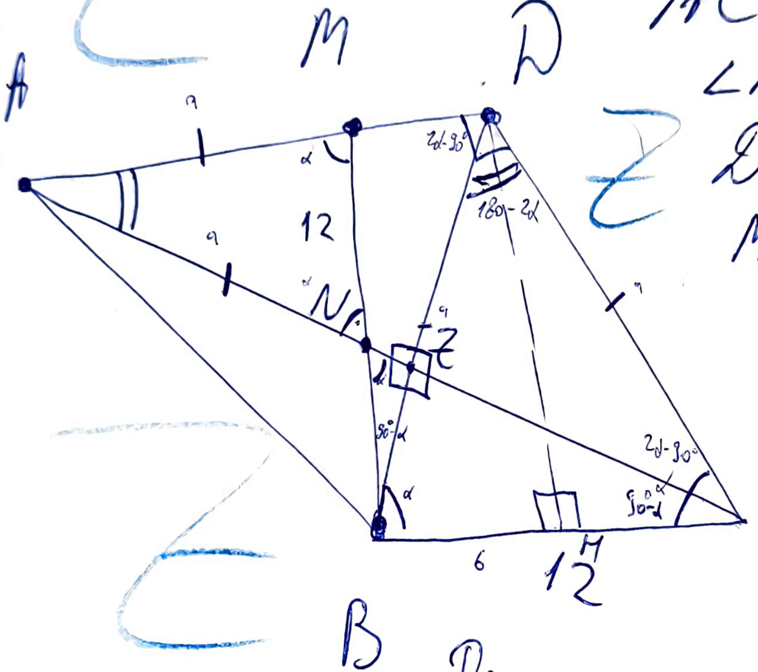
Ответ: V может принимать все значения из $(0; 33\sqrt{2}+33]$

Чистовик №3 3



Дано
ABCD выпуклый
$AC \perp BD$
$\angle ADC = 90^\circ$
$DB = DC = AM = AN$
$M \in [AD]$
$BC = 12$

$\boxed{S_{ABCD} = ?}$



$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

Решение.

1) $BD \cap AC = Z$

2) $\angle ZDC = 180^\circ - 90^\circ - \angle ZCD$

$\angle CAD = 180^\circ - 90^\circ - \angle DCA$

$\angle CAD = \angle ZDC$

3) $\Delta ANM = \Delta DBC$ по 2м сторонам и углу между ними

$\angle AMN = \angle ANM = \angle DCB = \angle DBC$

4) DH высота в ΔBCD

4

Чистовик

№4

a, b цифры

$\overline{ab}$ или $\overline{ba}$ простое

$\overline{4a89}\cdot\overline{290b} \underset{11}{\equiv} 1$

~~mod 11 a b ab~~

$(4000+100a+89)(2900+b)\underset{11}{\equiv}1$

$4000\cdot2900+4000b+290000a+100ab+89\cdot2900+89b\underset{11}{\equiv}1$

$3993\,\vdots\,11$, $2893\,\vdots\,11$

$7\times7+7b+7\times100a+9b+2900+b\underset{11}{\equiv}1$

$5+7b+7a+ab+7+b\underset{11}{\equiv}1$

$7b+7a+ab+b\underset{11}{\equiv}0$

$7a+8b+ab\underset{11}{\equiv}0$

$a(7+b)+8b+56\underset{11}{\equiv}56$

$(b+7)(a+8)\underset{11}{\equiv}1$

если $a=3$ то не подходит, $(b+7)\cdot11\underset{11}{\equiv}0$

$a=0$, $8b+56\underset{11}{\equiv}1$ $8b\underset{11}{\equiv}0$ $\cancel{b=0}$ $b=0$ $(0;0)$

$a=1$, $9b+63\underset{11}{\equiv}1$ $9b\underset{11}{\equiv}7$ $b=2$ $(1;2)$

$a=2$, $10b+70\underset{11}{\equiv}1$ $10b+3\underset{11}{\equiv}0$ $b\underset{11}{\equiv}+3$ $b=3$, $(2;3)$

$a=4$, $12b+12\cdot7\underset{11}{\equiv}1$ $b+6\underset{11}{\equiv}0$ $b=5$ $(4;5)$

$a=5$, $13b+13\cdot7\underset{11}{\equiv}1$ $2b+14\underset{11}{\equiv}1$ $2b\underset{11}{\equiv}9$ таких b цифр нет

$a=6$, $14b+14\cdot7\underset{11}{\equiv}1$ $3b+21\underset{11}{\equiv}1$ $3b\underset{11}{\equiv}2$ $b=8$ $(6;8)$

$a=7$, $15b+15\cdot7$ $4b+28\underset{11}{\equiv}1$ $4b\underset{11}{\equiv}6$ $b=7$ $(7;7)$

$a=8$, $16b+16\cdot7$ $5b+35\underset{11}{\equiv}1$ $5b\underset{11}{\equiv}10$ $b=2$ $(8;2)$

$a=9$, $17b+17\cdot7$ $6b+42\underset{11}{\equiv}1$ $6b\underset{11}{\equiv}3$ $b=6$ $(9;6)$

Чистовик

5

№4 продолжение

Условию про четырехзначные числа удовлетворяют только пары (a;b): (0;0), (1;2), (2;3); (4;5), (6;8), (7;7); (8;2), (9;6)

четн, :2 или :3, :5 или :2, четн, 77 не прост, четн

из пар (0;0), (1;2); (4;5); (6;8); (7;7); (8;2); (9;6) не получится составить простое

:3

из (2;3) можно получить 23 - простое

Ответ может получиться только 23.

N 6.

	вероятности		от общей
Очки Ани	A+	ничья	Т+
1	0	0	$\frac{1}{12}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}-\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$		
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Чистовик Черновик

№5

Заметим, что в обоих наборах количество чётных и нечётных чисел одинаково.

Рассмотрим случаи а,в, когда

Ч Ч   Н – нечётная

Ч Н   Ч чётная

Н Ч

Н Н

если Ч Ч, то 5а-3в и 7а-5в Ч Ч

если Ч Н, или Н Ч, то 5а-3в, 7а-5в Н Н

если Н Н, то 5а-3в и 7а-5в Ч Ч

При любых по чётности а и в, ~~кол-чество чётных чисел неуменьшается, но чтобы и в начальном и в конечном наборах были одинаковые кол-ва Ч и Н, нужно брать~~ только а, в,

$1+2$

$20+21+\ldots+45 \underset{4}{\equiv} 0+1+\ldots+25=\frac{26\cdot25}{2}\underset{4}{\equiv}$

$\underset{4}{\equiv} 13\cdot25 \underset{4}{\equiv} 1$

$2001+\ldots+2026 \underset{4}{\equiv} 1+\ldots+26 \underset{4}{\equiv} \frac{27\cdot26}{2}=27\cdot13 \underset{4}{\equiv}$

$\underset{4}{\equiv} 3$

6

~~№5 продолжение~~
~~Буду рассматривать остатки чисел набора при делении на 4~~
~~0; 1; 2; 3; 0; 1; ... ; 0; 1 - сумма 6·4+1 ≡ 1 (4)~~
~~26 шт.~~
~~a и b можем выбрать так:~~

Чистовик

№5

В конечном наборе, чисел которые ⋮5 меньше, чем в начальном.

Рассмотрим всевозможные остатки a и b при ⋮ на 5.

mod5 a	b	5a-3b	7a-5b
0	0	0	0
0	1	-	0
0	2	-	0
0	3	-	0
0	4	-	0
1	1	-	-
1	2	-	-
1	3	-	-
1	4	-	-
2	2	-	-
2	3	-	-
2	4	-	-
3	3	-	-
3	4	-	-
4	4	-	-

— не 0

количество чисел ⋮5 не меняется

Значит набор 2001; ... 2026 не мог получиться

Ответ: Нет нельзя

Чистовик №6 7

Все комбинации Тани, А-Аня Т-Таня

сумма			сумма		
2	1	1	6	5	1
3	1	2	7	5	2
4	1	3	8	5	3
5	1	4	9	5	4
6	1	5	10	5	5
7	1	6	11	5	6
3	2	1	7	6	1
4	2	2	8	6	2
5	2	3	9	6	3
6	2	4	10	6	4
7	2	5	11	6	5
8	2	6	12	6	6
4	3	1			
5	3	2			
6	3	3			
7	3	4			
8	3	5			
9	3	6			
5	4	1			
6	4	2			
7	4	3			
8	4	4			
9	4	5			
10	4	6			

Сумма 2 в 1 случае
3 в 2
4 в 3
5 в 4
6 в 5
7 в 6
8 в 5
9 в 4
10 в 3
11 в 2
12 в 1

+ - победа

	A+ вероятность	ничья	T+
Если у А 1	0	0	$\frac{1}{12}$
Если у А 2	0	$\frac{1}{12} \times \frac{1}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{35}{36}$
А 3	$\frac{1}{12} \times \frac{1}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{2}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{33}{36}$
А 4	$\frac{1}{12} \times \frac{3}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{3}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{30}{36}$
А 5	$\frac{1}{12} \times \frac{6}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{4}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{26}{36}$
А 6	$\frac{1}{12} \times \frac{10}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{5}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{21}{36}$
А 7	$\frac{1}{12} \times \frac{15}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{6}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{15}{36}$
А 8	$\frac{1}{12} \times \frac{21}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{5}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{10}{36}$
А 9	$\frac{1}{12} \times \frac{26}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{4}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{6}{36}$
А 10	$\frac{1}{12} \times \frac{30}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{3}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{3}{36}$
А 11	$\frac{1}{12} \times \frac{33}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{2}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{1}{36}$
А 12	$\frac{1}{12} \times \frac{35}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{1}{36}$	$\frac{1}{12} \times 0$

Черновик 8

№6 продолжение

В) На каждом году вероятность А+ равна

$$\frac{1}{12}\left(\frac{1+3+6+10+15+21+26+30+33+35}{36}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{36\cdot5}{36}=\frac{5}{12}.$$

вероятность Т+

$$\frac{1}{12}\left(1+\frac{35+33+30+26+21+15+10+6+3+1}{36}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{36+36\cdot5}{36}=\frac{1}{2}.$$

~~тогда~~ вероятность ничьей:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}=\frac{1}{12}.$$

А) вероятность А+ $\frac{5}{12}$

Б) вероятность ничьей за 3 года - ~~1-7 где 7 - вероят~~ ~~1-(ничья)~~

= вероятность, что в каждом году ничья, т.е. $\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{1728}$

В) У Тани шансов выиграть больше ~~в году~~ и посчитать этих вероятность равна $1\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)+\frac{1}{12^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)=$

$$=\frac{1}{2}-\frac{5}{12}+\frac{1}{24}-\frac{5}{144}+\frac{1}{288}-\frac{5}{12^3}=$$

9

Чистовик

№6 продолжение

$= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{9}{288} - \frac{5}{12^3} =$

$= \frac{3}{24} - \frac{3}{96} - \frac{5}{12^3} =$

$= \frac{9}{96} - \frac{5}{12^3} = \frac{9 \cdot 18 - 5}{1728} = \frac{157}{1728}.$

$\times \begin{array}{r} 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$

$\frac{144}{8} = \frac{72}{4} = \frac{36}{2} = 18$ $=$

$= 81 \times 2 = 162$

Ответ А) $\frac{5}{12}$ Б) $\frac{1}{1728}$ В) $\frac{157}{1728}$

Черновик $\equiv 3a^2-ab-ab+3b^2 \equiv$

$3a^2-2ab+3b^2$

0 3

1

$2\alpha+\beta=90°$

$-9 \quad -7 \quad 3$

$4 \quad -15 \quad 1$

$5a-3b$

$3a-5b$

$12a-8b \vdots 4$

$15-19 =$

$=26$

$(5a-3b)(7a-5b)=$

$=35a^2-25ab-21ab+15b^2$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$a_1+a_2+\ldots+a_{26} \equiv_4 k$

$\boxed{5a_1-3a_2}+\boxed{7a-5b}+\ldots$

42879   28903

$5a-3b \equiv_4 a+b$

$3a+3b$

$4289 \times 2903 \equiv$

$\equiv 10 \times 10 \equiv 1$

4	4	→ 4	4
4	Н	→ Н	Н
Н	4	→ Н	Н
Н	Н	→ 4	4

00 01 02 03 04 11 12 13 14 22 23 24 33 34 44

00 01 0 0 =

0 0		0	0
0 1		1	3
0 2		2	2
0 3		3	1
1 1		2	2
1 2		3	1
1 3		0	0
2 2		0	0
2 3		1	3
3 3		2	2
3 4			

$1+2+3+\ldots+25$

$\frac{26 \cdot 25}{2} = 13 \cdot 25 \equiv_4 1.$

$1+\ldots+26 = \frac{26 \cdot 27}{2} = 13 \cdot 27 \equiv_4 3$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!