Выход: 13:09
Вернулся: 13:12
+1 лист

02-51-70-80
(185.5)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант RE-2

Место проведения Ростов-на-Дону
город

ДГТУ ИФР

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

11 класс

по математике
профиль олимпиады

Бадмаева Наран Сергеновича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

Бадмаев

02-51-70-80
(185.5)

~~1 Найдите сумма решений уравнения~~: системы

95 (девяносто пять)

3. Дано:

АВСД – 4-уг выпукл

АС и ВД – диаг

$AC \perp BD$

$\angle D = 90°$

ДВ = ДС

т М в АД

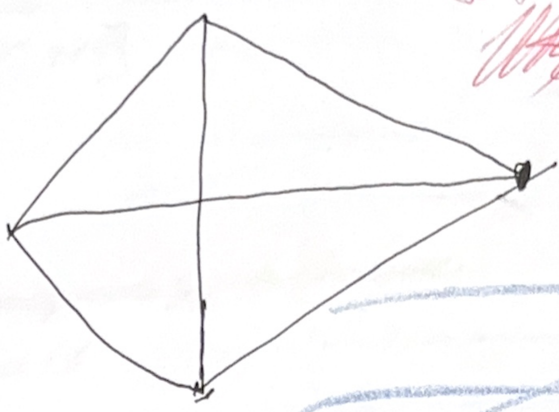
МВ ∩ АС в т N

АМ = AN = ВД

ВС = 12

Найти:

S_{ABCD} – ?



Решение:

02-51-70-80 (185.5)

1. Найдите число решений уравнения $3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$ на отрезке $[-3{,}15;\ 314]$ листовки

Решение:

Пусть $a=3^{\sin x}$
$b=5^{\sin x}$

(I) Перепишем исходное уравнение:

$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$2a^2+2b^2+2=2ab+2a+2b$

$2a^2+2b^2-2ab+2-2a-2b=0 \Rightarrow$ Сгруппируем:

$a^2+b^2-2ab+b^2+a^2-2a+1-2b+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=0 \Rightarrow$

$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0 \Rightarrow$ сумма квадратов действительных чисел равна 0, тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно 0. Отсюда: $\begin{cases} a-b=0 \\ a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a=1 \\ b=1 \end{cases}$ из второго и третьего следует $\Rightarrow$ $a=1$ и $b=1$. первое уравнение при этом также выполняется

(II) Вернемся к исходным переменным:

$3^{\sin x}=1$ и $5^{\sin x}=1 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$

Составим двойное неравенство:

$$-3{,}15\le \pi k\le 314$$

$-\frac{3{,}15}{\pi}\le k\le \frac{314}{\pi}$; $-\frac{3{,}15}{\pi}<-1$ Следовательно минимальное подходящее целое k равно -1. Т.к. $100\cdot\pi>314$, то $k=100$ - уже не подходит. 99π приблизительно равно 311. Следовательно максимальное подходящее целое k равно 99. Отсюда подходящих k: $99+1+1=101 \Rightarrow$ Ответ: 101 решение

чистовик

2 Решение:

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

По условию это уравнение имеет три корня: a; b; c

По теореме Виета для кубического уравнения:

$$\begin{cases} a+b+c=10+\sqrt{2} \\ ab+bc+ac=22+10\sqrt{2} \\ abc=22\sqrt{2} \end{cases}$$

Нужно найти V параллелепипеда со сторонами $a+1; b+1; c+1$

$V=(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=$
$=22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}+1=33+33\sqrt{2}=$
$=33(1+\sqrt{2})$

Длины сторон параллелепипеда $(a+1; b+1; c+1)$ обязаны быть строго больше нуля, т.е. если один корень хотя бы ≤ -1, то такого параллелепипеда не существует. Найдем корни исходного уравнения:

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

$x^3-10x^2+22x-\sqrt{2}(x^2-10x+22)=0$

$x(x^2-10x+22)-\sqrt{2}(x^2-10x+22)=0$

$(x-\sqrt{2})(x^2-10x+22)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{2}=a \\ x_2=5+\sqrt{3}=b \\ x_3=5-\sqrt{3}=c \end{array}\right.$

$a>0; b>0; c>0 \Rightarrow$ такой параллелепипед существует.

Ответ: $33+33\sqrt{2}$

02-51-70-80
(185.5)

5] a – количество очков, выпавших у Ани на 12гранном ~~куб~~ листовик

] x – сумма очков, выпавших у Тани на двух 6 гранных кубиков.

Вероятность в одном раунде:

Аня бросает один кубик. Вероятность выпадения любого числа одинакова и равна $\frac{1}{12}$. Таня бросает два кубика всего возможных $6 \cdot 6 = 36$. Вероятность получить конкретную сумму C у Тани:

2 или 12: $\frac{1}{36}$

3 или 11: $\frac{2}{36}$

4 или 10: $\frac{3}{36}$

5 или 9: $\frac{4}{36}$

6 или 8: $\frac{5}{36}$

7: $\frac{6}{36}$

Найдем вероятность ничьей в одном раунде: при ~~+~~ броске Тани вероятность того, что Аня выбросит в точности такое число на своей двенадцати гранник всегда равна $\frac{1}{12}$. Тогда вероятность ничьей равна произведению $\frac{1}{12}$ и сумма вероятностей для всех возможных бросков Тани. Т.к. сумма всех вероятностей бросков равна 1, получим вероятность ничьей: $\frac{1}{12}$.

Найдем вероятность победы Ани в одном раунде: Аня побеждает, если ее число строго больше суммы Тани.

Переберем варианты, если у Тани 2. Ане нужно от 3 до 12. Вероятность:

$\frac{1}{36} \cdot \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{10}{432}$. Если у Тани 3. Ане нужно от 4 до 12. Вероятность:

$\frac{2}{36} \cdot \frac{9}{12} = \frac{18}{432}$

Если у Тани 4. Ане нужно от 5 до 12.

Вероятность: $\frac{3}{36} \cdot \frac{8}{12} = \frac{24}{432}$

Если у Тани 5, Ане нужно от 6 до 12 черновик
Вероятность:

$\frac{4}{36} \cdot \frac{7}{12} = \frac{28}{432}$.

Если у Тани 6, Ане нужно от 7 до 12
Вероятность:

$\frac{5}{36} \cdot \frac{86}{12} = \cancel{\frac{40}{432}}\ \cancel{30}$. $\frac{30}{432}$

Если у Тани 7, Ане нужно от 8 до 12

Вероятность:

$\frac{6}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{30}{432}$

Если у Тани 8, Ане нужно от 9 до 12

Вероятность:

$\frac{5}{36} \cdot \frac{4}{12} = \frac{20}{432}$

Если у Тани 9, Ане нужно от 10 до 12

Вероятность:

$\frac{4}{36} \cdot \frac{3}{12} = \frac{12}{432}$

Если у Тани 10, Ане нужно от 11 до 12
Вероятность:

$\frac{3}{36} \cdot \frac{2}{12} = \frac{6}{432}$

Если у Тани 11, Ане нужно 12

Вероятность:

$\frac{2}{36} \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{432}$

Если и у Тани 12. Ане выиграть не может.

Сложим все вероятности, получим:

$\frac{180}{432} = \frac{5}{12}$.

Вероятность того, что ~~Тане~~ Ане выиграла раунд равна $\frac{5}{12}$. сумма всех исходных раундов равна 1.

Тогда вероятность того, что Таня выиграла раунд равна: черновик

1 – вероятность ничьи – вероятность выигрыша Ани.

Равно:

$1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

] A – вероятность того, что Аня выиграет ~~первый~~ уже после первого хода это в полноте её вероятность победы в одном раунде. Тогда $\frac{5}{12}$

~~ВН~~

б) Победитель так и не будет выявлен, если во всех трех возможных раундах выпадает ничье. Тогда вероятность ничьей в игре равна $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow$ равно $\frac{1}{12^3}$

в) Посчитаем вероятность выигрыша игры ~~Ани~~ Тани

Таня выигрывает в трех случаях:

1) победа в первом раунде
2) ничье в первом и победа во втором
3) победа во ~~втором~~ третьем и ничье в первых двух

Вероятность победы Тани равна:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}$ равно

$\frac{157}{2}$

Ответ: а) $\frac{5}{12}$
б) $\frac{1}{12^3} = \cancel{\frac{1}{1728}} = \frac{1}{12^3}$
в) $\frac{157}{288}$

4 Двузначное, составленное из цифр a и b равно $10a+b$, по условию ~~составим~~ кратное числа

Найдем остаток чисел $\overline{4a89}$ и $\overline{290b}$ по модулю 1. Т.к. $\overline{4a89} \equiv 1 (mod 11)$ $\overline{290b} \equiv 1 (mod 11)$ $\Rightarrow$

$\overline{4a89} - 1 \equiv 0 (mod 11)$

$\overline{290b} - 1 \equiv 0 (mod 11)$

$\overline{4a89} = 4 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9$

сравнимо с

$10^3 \equiv -1 (mod 11)$

~~$4a - 8 + 9 = a - 3$~~

$10^2 \equiv 1 (mod 11)$ $\Rightarrow$

$10 \equiv -1 (mod 11)$

$\Rightarrow 4 \cdot 10^3 \equiv -4 (mod 11)$

$a \cdot 10^2 \equiv a (mod 11)$

$8 \cdot 10 \equiv -8 (mod 11)$

$9 \equiv (mod 11)$

$\overline{4a89} \equiv -4 + a - 8 + 9 =$

$= a - 3 \equiv 1 (mod 11)$

Д:

$\overline{290b}$

$10^3 \equiv -1 (mod 11)$

$10^2 \equiv 1 (mod 11)$

$10 \equiv -1 (mod 11)$

$b \equiv b (mod 11)$

$2 \cdot 10^3 \equiv -2 (mod 11)$

$9 \cdot 10^2 \equiv 9 (mod 11)$

$0 \cdot 0 \equiv 0 (mod 11)$

$b \equiv b (mod 11)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{290b} \equiv 7 + b (mod 11) \Rightarrow \overline{290b} \cdot \overline{4a89} \equiv$

$\equiv (b+7)(a-3) \equiv 1 (mod 11)$. ~~Т.к. $\overline{ab}$ $\overline{ab}$~~ ~~двузначное кратное числа~~ a, b

Д все возможные значения

$a = 1 \Rightarrow (a-3) \equiv -2 (mod 11) \Rightarrow (a-3) \equiv 9 (mod 11)$

Т.к. $9 \cdot 5 \equiv 1 (mod 11) \Rightarrow b + 7 \equiv 5 (mod 11)$ получим

$b + 7 \equiv 16 \Rightarrow b = 9$. ~~Получим число~~ Т.к. b цифра

~~$b < 1$~~ $b + 7 = 16 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow$ полученное число 19

$a=2$. Тогда $a-3 \equiv -1 \equiv 10 \pmod{11}$. Т.к. (столбик)
$10 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{11}$, то $b+7 \equiv 10 \Rightarrow b+7=10 \Rightarrow$
$b=3 \Rightarrow \underline{23}$

$a=3$. Тогда $a-3 \equiv 0$ и $(a-3)(b+7) \equiv 0 \pmod{11}$, что невозможно

$a=4$. Тогда $a-3 \overset{11}{\equiv} 1 \pmod{11}$, поэтому
$(b+7) \equiv 12 \pmod{11} \Rightarrow b+7=12 \Rightarrow b=5 \Rightarrow$
число 45 – полученное число

$a=5$. Тогда $a-3 \equiv 2 \pmod{11}$, ~~поэтому~~ т.к.
$2 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{11}$, то $b+7 \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow b+7$, но
$b-[7;18]$ нет числа подходящего $\Rightarrow$
этот случай невозможен

$a=6$. Тогда $a-3 \equiv 3 \pmod{11}$, т.к. $3 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{11}$,
то $b+7 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow b+7=15 \Rightarrow b=8$, получаем
68 – полученное число

$a=7$. Тогда $a-3 \equiv 4 \pmod{11}$, т.к. $4 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$

$b+7 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow b+7=14 \Rightarrow b=7 \Rightarrow 77$ – полученное число

$a=8$. Тогда $a-3 \equiv 5 \pmod{11}$, т.к. $5 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{11}$
$b+7 \equiv 9 \pmod{11}$, откуда $b+7=9 \Rightarrow b=2 \Rightarrow$
82 – полученное число

$a=9$. Тогда $a-3 \equiv 6 \pmod{11}$, т.к. $6 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{11}$
$b+7 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow b+7=13 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 96$ – полученное число

Получили числа:
19; 23; 45; 68; 77; 82; 96, однако
простыми являются только
19 и 23

Ответ: 19 и 23 – простые числа

6 [Вершины треугольника лежат на

(черновик)

$\cancel{A} = f(a)$

$B = f(a)$

$C = f(b)$

$a > b > c$

~~A = f(A)~~, где $A > B > C$

обозначим через F длину наибольшей стороны $\triangle ABC$

Нужно доказать, что для $\forall$ т. P лежащей на границе

Найдется отрезок с концами на $y = f(x)$, содержащий т. P причем длина этого отрезка не превосходит F.

Если т. P лежит на графике можно взять вырожденный отрезок длины 0

Далее считаем, что P не лежит на графике, если т. P лежит ниже прямой AC то отразим всю картинку отн. оси Ox график многочлена перейдет в перейдет график другого многочлена.

и задача не изменится,

Поэтому достаточно разобрать случай, когда т. P лежит выше прямой AC

обозначим через $l(x)$ линейную функцию графиком, которой является прямая (питовый) AC. Ч/з $m(x)$ линейную функцию, графиком, которой является прямая AB. Через $n(x)$ линейную функцию графиком, ~~которой~~ является прямая BC. Тогда расположение △ следует, если $x \in [A, B]$, то точки △ с такой абциссой имеют координаты от $l(a)$ до $m(x)$. т.е. $l(a) \le y \le m(a)$ если $x \in [B, C]$, то точки △ с такой абциссой имеют коорд от $l(x)$ до $n(x)$, т.е. $l(a) \le y \le n(x)$.] P равно $\{$ $p=$ (p, y) $p = [a; b]$, тогда $l(p) \le y \le n(p)$

случай 1.a) $f(p) \ge v$

Проведем ч/з P прямую ∥ AC, её уравнение запишем $y = ~~x+~~ vx+v$

8:

$j(x) = m(x) - v(x+v)$, она непрерывна т.к. прямая $y = vx + V$ ∥ AC, её вертикальное смещение этих прямых постоянной, поэтому

$j(a) = l(p) - v$

$j(c) = l(p) - v$ т.к. $v \ge l(p)$, получим

$j(a) \le 0$; $j(c) \le 0$, с другой стороны

$j(p) = m(p) - v > 0$, значит $j(a) \le 0$

$j(a) \le 0 \le j(p)$; $j(c) \le 0 \le j(p)$, по теореме о промежуточном значении

существуют числа $v_1 \in [a;p]$, $v_2 \in [p;c]$
такие, что $j(v_1)=0$, $j(v_2)=0 \Rightarrow$ точки
$U=(v_1; f(v_1))$ и $V=(v_2; f(v_2))$ лежат
на графике многочлена и на проведенной
прямой, т.к. $v_1 \le p \le v_2$, т $p \in [UV]$ лежит
на отрезке UV, оценим его длину,
поскольку $UV \parallel AC$, существует
такое число k, для которого $|UV| = k(v_2-v_1)$,
модуль $|AC| = k(c-a)$. Из
$v_1 \in [a;p]$, $v_2 \in [p;c]$ следует
$v_2 - v_1 \le c-a$, поэтому модуль
$|UV| \le |AC| \le h$.

черновик

Случай 1б:
$|p| \le \ldots$, проведем
через p прямую $\parallel AB$, и снова
обозначим её уравнение
через $y = v(x)+v$.

$j(x) = f(x) - (v(x)+v)$, т.к. эта прямая
$\parallel AB$ имеем $j(a) = m(a) - v$
$j(p) = m(p) - v$. Из неравенства

$v \le m(p)$, получим, что $j(a) \ge 0$

$j(p) \le 0$. Кроме того, $j(b) = f(b) - v \le 0$
Значит $j(a) \ge 0$ ~~больше~~ $\ge j(b)$
по теореме о смене знака существуют
числа $v_1 \in [a;p]$, $v_2 \in [p;b]$, такие
что $j(v_1)=0$, $j(v_2)=0$. Следовательно
точки $U=(v_1; f(v_1))$, $V=(v_2; f(v_2))$ лежат
на графике и проведенной прямой
причем $v_1 \le p \le v_2$. Значит $p \in U;V \Rightarrow p \in UV$
т.к. $UV \parallel AB$. Получаем $|UV| \le |AB| \le h$

чистовик

Теперь $l(p) \le \cancel{0}\, v \le n(p)$

случай 2.а) $m(p) \ge v$
проводим через P прямую $\parallel AB$ и рассматриваем
$j(x) = m(x) - v(x+v)$. Тогда
$j(a) = \cancel{m(a)=}\ l(p) - v$
$j(c) = l(p) - v$, поэтому
$j(a) \le 0$ и $j(c) \le 0$, а также
$j(p) = f(p) - v \ge 0$, по теореме о промеж. знач. существует
$v_1 \in [a;p]$ и $v_2 \in [p;c]$, такие
что $j(v_1)=0$; $j(v_2)=0$, получаем
отрезок UV, концы которого на графике, содержащий точку, причем $|UV| \le |AC| = M$.

случай 2.б) $f(p) \le v$. Проводим ч/з P прямую $\parallel BC$ и рассматриваем
$j(x) = f(x) - n(x)$
$j(p) = f(p) - n(p) - v$
$j(c) = f(c) - n(p) - v$
из $v \le n(p)$ следует $j(c) \ge 0$
$\cancel{j(p) \ge 0}$, а также $j(p) = f(p) - v \le 0$

по теореме о ограничен значении существует: $v_1 \in [a, p]$ и $v_2 \in [p, c]$ такие, что $i(v_1)=0$; $i(v_2)=0$ следовательно сущ U отрезок ~~на концах~~ с концами на графике, содержащий p и $|VV| \le x \le M$.

Ответ: доказано

чистовик