0 239570 400006

23-95-70-40
(164.8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 лист

Вышел: 12:48

Вернулся: 12:51

Вариант Е-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Макаяна Георгия Кареновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

23-95-70-40 (164.8)

Черновик 1

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}+1=\left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$

$b=\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$

$a^2+b^2-ab-a-b+1=0$

$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$a(a-1)$

$(a-b)^2=-(a-1)(b-1)$

$(a-b)^2+(a-1)(b-1)=0$

$a\neq 1$

$a=b$

$\sin x:[-1,0]$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}<$

$1\leq a=2^{-\sin x}\leq 2$

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}-\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}\right)^2$

$\sqrt[100]{c}$

$\sin x\in[-1,0]$: $1<a\leq 2$

$1<b\leq 7$

$\sin x\in[0,1]$: $\frac{1}{2}\leq a\leq 1$

$\frac{1}{7}\leq b\leq 1$

Черновик

$x^3 + (7+6\sqrt{5})x = (6+\sqrt{5})x^2 + 7\sqrt{5}$

$a^3 + 7a + 6\sqrt{5}a = 6a^2 + \sqrt{5}a^2 + 7\sqrt{5}$

$x^3 - (6+\sqrt{5}) \cdot x^2 + (7+6\sqrt{5})\, x - 7\sqrt{5}$

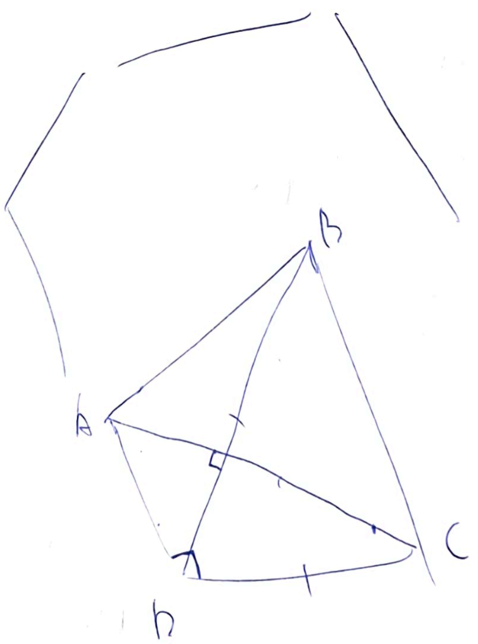
и

abc $(x-a)(x-b)(x-c)$

и

$x^3 - (a+b+c) \cdot x^2 + x(ab+ac+bc) - abc$

abc +



Чистовик 6 Задача 5

б)

Вероятность победить у Макара = сумме вероятностей победы в каждом из раундов. (аналог. для Захара).

Заметим, что в независимом раунде вероятность победы Макара — $\frac{5}{12}$; ничьи — $\frac{1}{2}$ ⇒ Захара $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$;

2-ой раунд 3-ий раунд

$\Rightarrow$ Вер. победы Макара $= \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \frac{5}{12} =$

$= \frac{5}{12}\left(1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2\right)$. Аналог. у Захара это: $\frac{6}{12}\left(1+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)^2\right)$

$\Rightarrow$ у Захара вероятность победы больше и равна $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{144+12+1}{144}\right) =$

$= \frac{157}{288}$. Ответ: Захар, $\frac{157}{288}$.

Задача 6

Заметим, что пусть вершины треугольника — $A(x_1,y_1)$; $B(x_2,y_2)$; $C(x_3,y_3)$.
Т.к. это график многочлена, то он непрерывен.
Без ограничения общности: ~~$y_1 > y_2 > y_3$~~ $x_2 \le x_1 \le x_3$

Рассмотрим любую точку внутри или на границе треугольника. Для граничных точек, просто берём отрезок — сторону треугольника, где эта точка лежит. Т.к. её длина ≤ 1, то всё хорошо (т.к. A, B, C лежат на графике). Если же точка не на границе, то ~~проведём~~ пусть это точка Q. Проведём через Q прямую ~~...~~ параллельную $BC =: \ell$ и рассмотрим пересечения ℓ с графиком, причём ближайшие пересечения к Q слева и справа, получив точки M и N.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

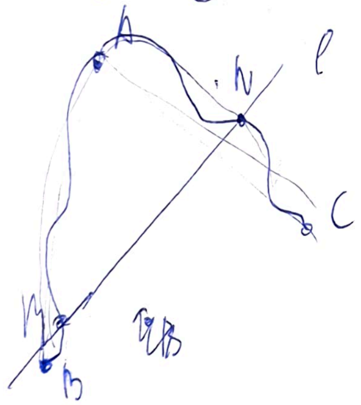
Исследователь 7   Задача 6

~~Доказ~~ Пояснение: ~~Взяв во~~ $Q \notin BC \Rightarrow \exists l$, такая что $l \parallel BC$ и $Q \in l$ существует. Рассмотрев все пересечения l и графика многочлена, на l будет несколько точек. ~~Ибо~~ M и N - ближайшие к Q с двух разных сторон.

Почему такие M и N существуют?

~~Заметим, что если у Q координаты (x_0, y_0)~~
~~Предположим, что они существуют. Тогда~~

Заметим, что т.к. Q внутри $\triangle ABC$ и $l \parallel BC \Rightarrow A$ находится по одну полуплоскость от l, а B и C по другую.



Т.к. график мн-на непрерывен, причём, т.к. $x_B \le x_A \le x_C$ следует, что график соединяет непрерывно A и B, и A и C $\Rightarrow$ их непрерывно $\Rightarrow$ соединив A и B графиком - получим M, а A и C - получим N. При этом, т.к. степень многочлена - докз, что > 2 $\Rightarrow$, что ~~график~~ под графиком соединяющим A и $B \to A$ и $A \to C$, точка внутри треугольника $\triangle ABC \Rightarrow Q$ внутри $\Rightarrow Q \in$ отрезку $MN \Rightarrow M$ и N существуют. При этом, т.к. M лежит на графике между B и $C \Rightarrow$, что $x_B \le x_M \le x_A$ (где x_A, x_B, x_M - x-координаты этих точек). Аналогично $x_A \le x_N < x_C$ $\Rightarrow |x_N - x_M| < |x_C - x_B|$, но т.к. $MN \parallel BC \Rightarrow |y_N - y_M| < |y_C - y_M|$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик 8 Задача 6.

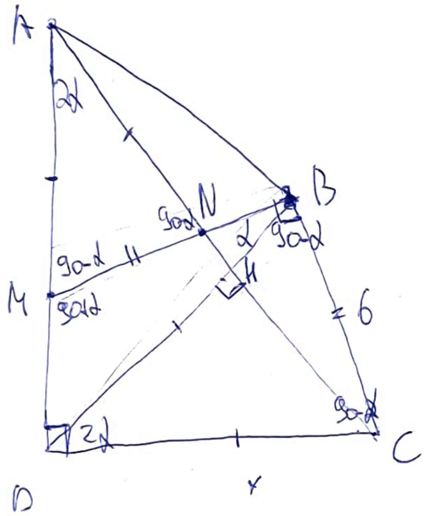
(где y_N, y_M, y_C, y_B - ординаты этих точек), эквивалентно

из уравнения прямой и того, что у параллельных коэф. наклона совпадает.

$\Rightarrow \sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2} < \sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2} = BC < 1$

$\Rightarrow NM < 1$ и $Q \in NM$, а также N и M принадлежат графику. $\Rightarrow$ для всех Q мы нашли искомый отрезок. чтд.

Задача 3.



$H = BD \cap AC$

Пусть $\angle BDC = 2\alpha \Rightarrow \angle ACD = 90-2\alpha \Rightarrow \angle DAC = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DBC = \triangle ~~MAN~~ ANM$ (т.к. $AH = AN = BD = DC/2$ и $\angle BDC = \angle MAW = 2\alpha$).

$\Rightarrow MW = BC = 6.$

$\angle AMW = \angle ANM = 90-\alpha = \angle DBC = \angle DCB$; $\angle DMB = 180 - \angle AMB = 90+\alpha$

$\Rightarrow \angle BMD + \angle DCB = 180° \Rightarrow DMBC$ - вписанный $\Rightarrow \angle MBC = 90°$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot AC$. Заметим, что т.к. DH - высота в прямоуг. треугольнике

$\Rightarrow DC^2 = CH \cdot AC \Rightarrow AC \cdot DB = \frac{DC^3}{CH}$;

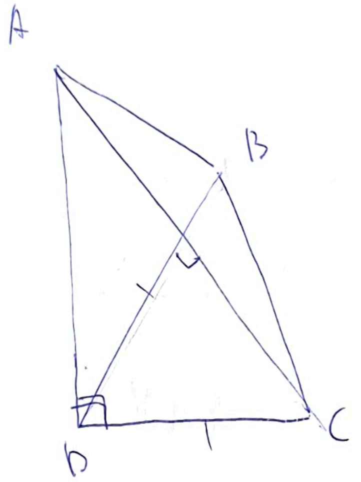
т.к. BH - высота в прямоуг. треуг. $\Rightarrow \underset{36}{BC^2} = CH \cdot CN = CH \cdot (AC - AN)$.

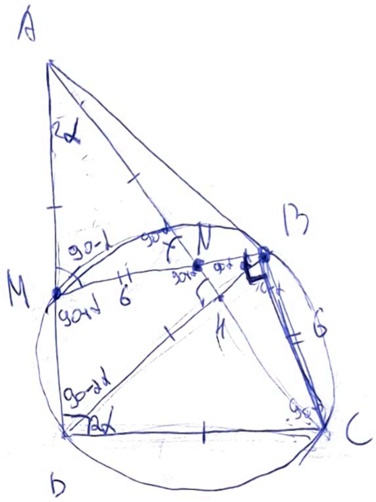
Также заметим, что если $DC = x$ и $DH = q \Rightarrow BH = x - q \Rightarrow CH^2 = 36 + x^2 + q^2 + 2xq$ и

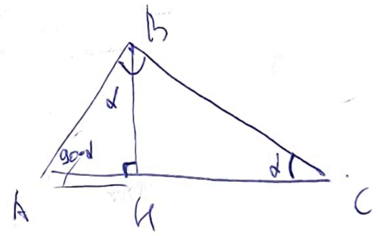
$CH^2 = x^2 + q^2 \Rightarrow 18 = xq$, можно найти CH через x.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Черновик 7







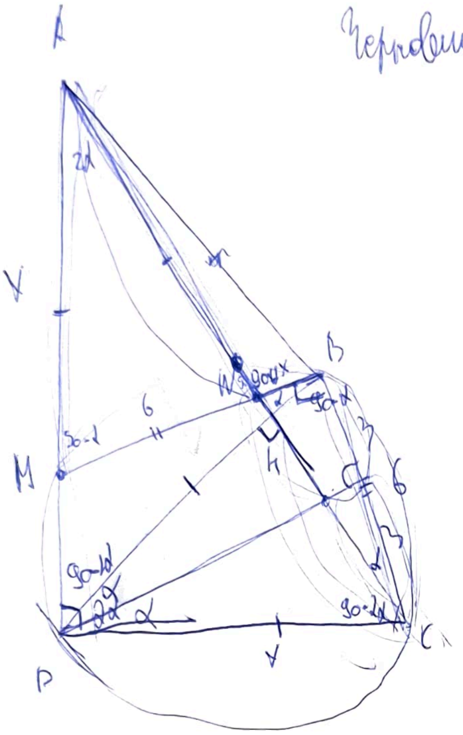
$CN \cdot CA = DC^2$

$BCA \sim HBA$

$AB^2 = AC \cdot AH$

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{HB}$$

Черновик 4

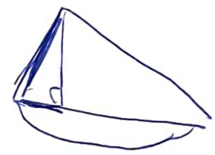


$x \cdot AC$

$DC^2 = CH \cdot CA$

$\frac{DC^2}{36} = \frac{CA}{CN}$

$36 = CH \cdot \cancel{C}N$



$CH^2 + BH^2 = 36$

$\frac{6 \cdot x}{2}$

$CN = \frac{36 CA}{DC^2}$

$BD \cdot AC = BD(AN + NC)$

$AN^2 + AN \cdot NC$

$BD^2 + BD \cdot CN$

$BD^2 + \frac{36 CA}{BD}$

a, b - цифры

$\overline{1a09} = \overline{6b36}$

23-95-70-40
(164.8)

$(1009 + 100 \cdot a) \cdot (6630 + b) \vdots 1$ Черновик

a

11

2009

6600 6620 6640

6840

10

990 230

220

19

$(8+a) \cdot (10+b) \vdots 1$

11

80

$3 + 10a + 8b + ab \vdots 1$

11

$10b+a$ - простое

$10a+b$ - простое

$\boxed{(8+a)(b-1) \vdots 1}$

11

$\boxed{ab \neq 0}$

1,1 a, b - цифры

2,6

3,4 0

$(b-1)(8+a) \vdots 1$

$\overline{ab}$

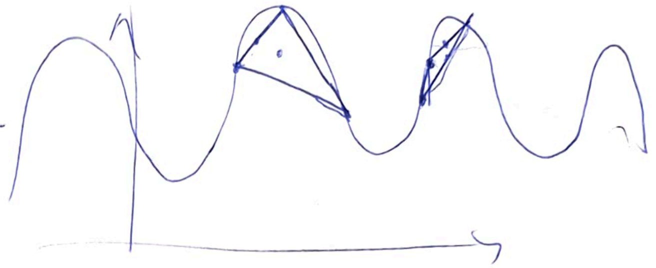
$\overline{ba}$

$7b - a - 8 + ab$

Черновик 6

1, 2, ..., 12

$\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ ... $\frac{1}{12}$



2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A B C

$f(x) = a_{2015} \cdot x^{2015} + \ldots + a_1 x + a_0$

$(b-1)(8+a) \vdots 11$

5·6

15 56

2 1

$a, b < 11$

8

a, b - остатки

2; 3

x_1 $y_1 = f(x_1)$

4 + 4

x_2 $y_2 = f(x_2)$

3 1

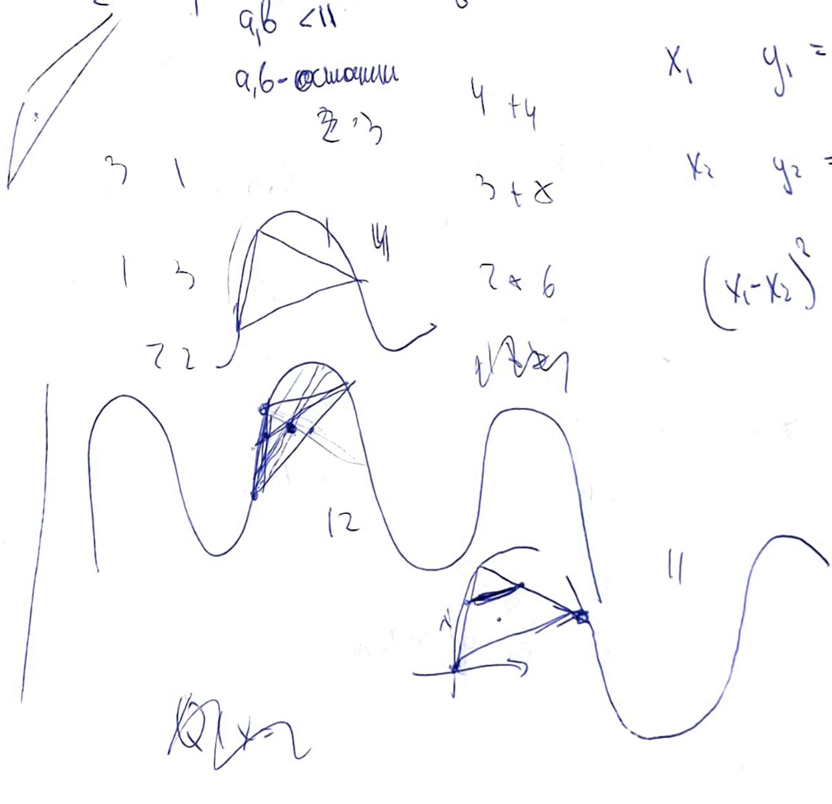
3 + 8

1 3

2 + 6

$(x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2$

2 2



$P(Z = 2) \cdot P(M > 2)$

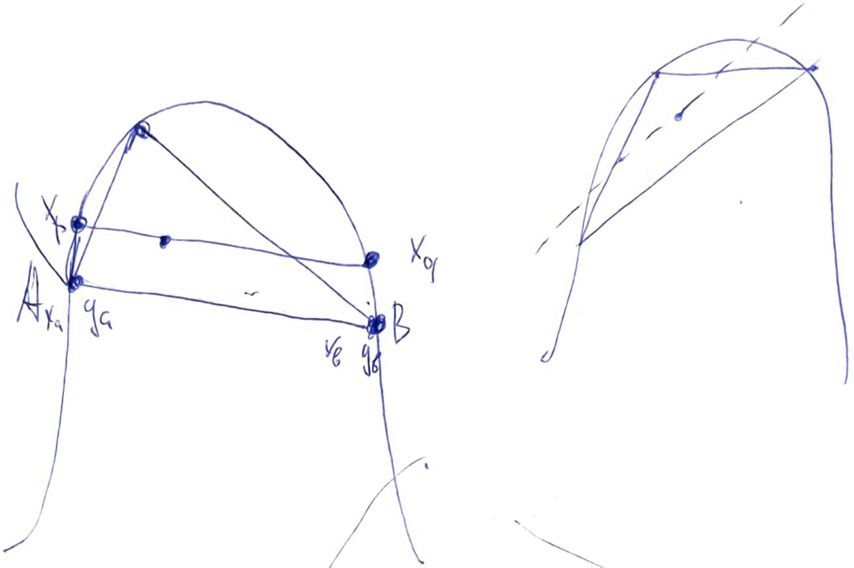
$$\begin{array}{r} \times\ 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$\frac{10}{12} \cdot \frac{1}{36} + \frac{9}{12} \cdot \frac{2}{36}$

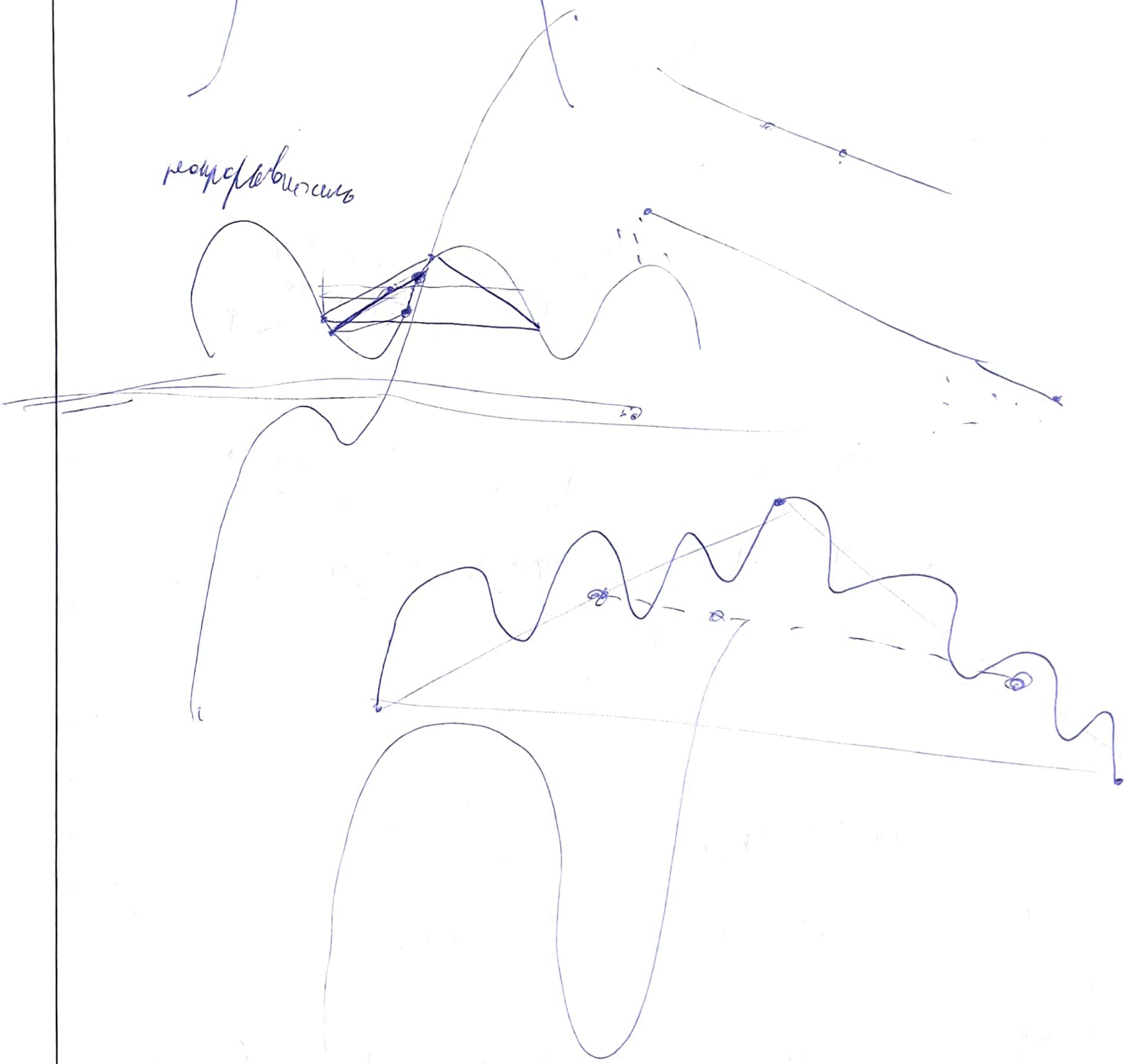
$+ \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{36} + \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{36}$

$-101 = \frac{-101\pi}{\pi} < -\frac{315}{\pi} < \frac{-100\pi}{\pi}$

Черновик :)



непрерывность



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик 1.

Задача 1

Пусть $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$, $b = \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$;

$\Rightarrow$ уравнение выглядит так: $a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = a + b - ab - 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 = -(a-1)(b-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{(a-b)^2 + (a-1)(b-1) = 0;}$

Заметим, что $\sin x \in [-1, 1]$;

~~Если $\sin x \in [0, 1]$: если $\sin x = 0 \Rightarrow a = 1$; если $\sin x = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$; а если $0 < \sin x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} < 1$ (покажу, что~~

~~$\Rightarrow$ чем больше $\sin x$ (степень), тем $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$ и $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$ меньше, т.к. $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7} < 1$, а $\sin x$ мы взяли, когда он положителен.~~

~~$\Rightarrow \frac{1}{2} \le a \le 1$ и $\frac{1}{7} \le b \le 1$;~~

~~Если же $\sin x \in [-1, 0]$:~~

~~$\Rightarrow$ т.к. знак $\sin x$ (степень) < 0 и $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7} < 1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ чем $\sin x$ меньше, тем a и b — меньше $\Rightarrow$~~

Заметим, что функция $y = a^x$, где $0 < a < 1$ — убывает, т.к. $\forall x_1 > x_2$: $a^{x_2} \vee a^{x_1} \Leftrightarrow 1 \vee a^{x_1 - x_2}$, а т.к. $x_1 - x_2 > 0$, и $0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a^{x_1 - x_2} \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow y = a^x$ действительно убывает. $\Rightarrow$ Если $\sin x \in [0; 1]$: $\frac{1}{2} \le a \le 1$; $\frac{1}{7} \le b \le 1$;

Чистовик 2

Задача 1

Чистовик

$\Rightarrow (a-1)\cdot(b-1) \geq 0$, т.к. $a,b \leq 1 \Rightarrow (a-1) \leq 0$ и $(b-1) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0$;

Если же $\sin x \in [-1,0]$:

$1 \leq a \leq 2$; $1 \leq b \leq 7 \Rightarrow (a-1)\cdot(b-1) \geq 0$, т.к. $a,b \geq 1$;

$\Rightarrow (a-1)(b-1)$ всегда ≥ 0.

$\Rightarrow$ т.к. $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 + (a-1)(b-1) \geq 0$, но т.к. оно равно 0 в уравнении $\Rightarrow a=b$ и $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$;

$a=1$ тогда и только тогда, когда $\sin x = 0$ и аналог. $b=1$ в таком же случае. $\Rightarrow$ уравнение равносильно тому, что $\sin x = 0$. (действительно если подставить $\sin x = 0$ то и левая и правая части $=3$). $\Rightarrow$ тогда $x = \pi k$ для целых k.

$\Rightarrow -315 \leq k\pi \leq 3{,}14 \Rightarrow \frac{-315}{\pi} \leq k \leq \frac{3{,}14}{\pi}$;

$0 < \frac{3{,}14}{\pi} < 1$; $-101 = \frac{-101\pi}{\pi} < \frac{-315}{\pi}$;

$\frac{-315}{\pi} < \frac{-100\pi}{\pi} = -100 \Rightarrow k \in [-100, 0]$, где k - целое.

$\Rightarrow$ кол-во решений уравнения: 101. Ответ: 101.

~~Чистовик~~ Чистовик з Задача 2.

По теореме Безу: (a, b, c - корни)

$$x^3-(6+\sqrt{5})x^2+(7+6\sqrt{5})x-7\sqrt{5}=(x-a)(x-b)(x-c)$$

=> Запишем теорему Виета для этого многочлена:

$$\begin{cases} -abc=-7\sqrt{5} \\ ab+ac+bc=7+6\sqrt{5} \\ -(a+b+c)=-(6+\sqrt{5}) \end{cases}$$

=> $V_{парал.}=(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=7\sqrt{5}+7+6\sqrt{5}+6+\sqrt{5}+1=$
$=14+14\sqrt{5}$; Ответ: $14+14\sqrt{5}$;

Задача 4

Заметим, что если одна из цифр a или b $=0$, то составленное двузначное число оканчивается на 0. (начинаться на 0 ~~оно~~ не может, иначе будет недвузначное). Тогда это число кратно 5, а значит непростое, значит произведение, и $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

$\overline{1a09}=1009+100a\equiv_{11} 8+a$ (т.к. $1009\equiv_{11}8$, а $100\equiv_{11}1$).

$\overline{683b}=6830+b\equiv_{11}10+b\equiv_{11}b-1$. (т.к. $6830\equiv_{11}10$).

=> $(b-1)(8+a)\equiv_{11}1$

~~Рассмотрим всевозможные простые двузначные~~ числа

Рассмотрим какие пары остатков по модулю 11 дают в произведении 1: x, y - остатки по мод. 11 и $xy\equiv_{11}1$.

Чистовик 4 Задача 4

~~$x, y \not\equiv_{11} 0$~~; $x, y \not\equiv 0$.

~~Если $x = 1$~~

Пусть для x_0 есть $\overbrace{y_0 \text{ и } y_1}^{\text{остатки по mod 11}}$, где $y_0 \not\equiv_{11} y_1$ и $x_0 \cdot y_1 \equiv_{11} 1$ и $x_0 y_0 \equiv_{11} 1$.

$\Rightarrow x_0 y_1 \equiv_{11} x_0 y_0 \rightarrow x_0(y_1 - y_0) \equiv_{11} 0$. Т.к. 11 – простое и $(x_0, 11) = 1$

$\Rightarrow y_1 - y_0 \equiv_{11} 0 \Rightarrow y_1 \equiv_{11} y_0 \Rightarrow$ для каждого остатка не более одного обратного (с которым в произведении ~~дают~~ дают 1 по модулю 11).

$\Rightarrow$ тогда для 1, обратный: 1; для 2, обратный: 6;

для 3: 4; для 5: 9; для 7: 8; для 10: 10;

(1,1); (2,6); (3,4); (5,9); (7,8); (10,10) – пары обратных (у 0 очевидно нету). Переберём для каждой пары обратных, если эта пара – $((b-1),(8+a))$.

$\Rightarrow$ (1,1): $b - 1 \equiv_{11} 1$ и $8 + a \equiv_{11} 1 \Leftrightarrow b = 2$, $a = 4$; 24 и 42 – непростые.

(2,6): $\left[\begin{array}{l} b-1 \equiv_{11} 2 \text{ и } 8+a \equiv_{11} 6 \Rightarrow b = 3,\ a = 9;\ 39 \text{ и } 93 \text{ – непростые.} \\ b-1 \equiv_{11} 6 \text{ и } 8+a \equiv_{11} 2 \Rightarrow b = 7,\ a = 5;\ 75 \text{ и } 57 \text{ – непростые} \end{array}\right.$

(3,4): $\left[\begin{array}{l} b-1 \equiv_{11} 3 \text{ и } a+8 \equiv_{11} 4 \Rightarrow b = 4;\ a = 7;\ \boxed{47 \text{ – простое}};\ 74 \text{ – неп.} \\ b-1 \equiv 4 \text{ и } a+8 \equiv 3 \Rightarrow b = 5;\ a = 6;\ 56 \text{ и } 65 \text{ – непростые.} \end{array}\right.$

(5,9): $\left[\begin{array}{l} b-1 \equiv 5 \text{ и } 8+a \equiv 9 \Rightarrow b = 6,\ a = 1 \Rightarrow 16 \text{ – непростое}, \boxed{61 \text{ – простое.}} \\ b-1 \equiv 9 \text{ и } a+8 \equiv 5 \Rightarrow b \equiv_{11} 10 \Rightarrow \text{такой цифры } b \text{ быть не может.} \end{array}\right.$

(7,8): $\left[\begin{array}{l} b-1 \equiv 7 \text{ и } a+8 \equiv 8 \Rightarrow a \equiv 0 \Rightarrow \text{такой цифры } a \text{ быть не может.} \\ b-1 \equiv 8 \text{ и } a+8 \equiv 7 \Rightarrow b = 9,\ a \equiv_{11} 10 \Rightarrow \text{такой } a \text{ быть не может.} \end{array}\right.$

(10,10): $b - 1 \equiv 10$, $a + 8 \equiv 10 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow$ такой b быть не может.

$\Rightarrow$ Ответ: 47 или 61.

Чистовик 5. Задача 5

~~Решение~~. Пусть кол-во очков Макара это M, а Захара - Z.

$\Rightarrow$

M	1	2	3	...	11	12
$P(M=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

, т.к. кубик равновероятный.

У Захара же ~~36 вар~~ 6 вариантов на первом кубике и 6 на втором, $\Rightarrow$ 36 пар (упорядоченных), для которых посчитав сумму и распределение получим:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

А) это равно $P(Z=2)\cdot P(M\geq 3)+P(Z=3)\cdot P(M\geq 4)+\ldots+P(Z=11)\cdot P(M\geq 12)=$

$$=\frac{1}{36}\cdot\frac{10}{12}+\frac{2}{36}\cdot\frac{9}{12}+\frac{3}{36}\cdot\frac{8}{12}+\frac{4}{36}\cdot\frac{7}{12}+\frac{5}{36}\cdot\frac{6}{12}+\frac{6}{36}\cdot\frac{5}{12}+\frac{5}{36}\cdot\frac{4}{12}+$$

$$+\frac{4}{36}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{36}\cdot\frac{2}{12}+\frac{2}{36}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{3\cdot 144}\left(10+\overset{28}{18}+\overset{52}{24}+\overset{80}{28}+\overset{110}{30}+\overset{140}{30}+\overset{160}{20}+\right.$$

$$\left.+12+6+2\right)=\frac{1}{3\cdot 144}\cdot 180=\frac{60}{144}=\frac{15}{36}=\boxed{\frac{5}{12}};$$ Ответ: $\frac{5}{12}$.

Б) Найдем вероятность ничьи в первом раунде:

$$\sum_{x=2}^{12} P(M=x)\cdot P(Z=x) = \frac{1}{12}\left(\sum_{x=2}^{12} P(Z=x)\right)=\frac{1}{12}\cdot 1=\frac{1}{12};$$

Т.к. ~~исходы~~ исходы раундов независимы $\Rightarrow$ вероятность того, что в 3 раундах ничья $=\left(\frac{1}{12}\right)^3 \Rightarrow$ Ответ: $\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{1728}$;