

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-1, 10 класс

Место проведения: Тенза
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы!
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Николаева Матвей Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

Prof

65-67-62-91
(1844)

Исходник.

$\sqrt{1}$

$$2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = 14^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{2\sin x} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 14^{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot 7^{2\sin x} + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot 1 +$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7^{2\sin x} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7^{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2^{\sin x} - 7^{\sin x})^2 + \frac{1}{2} \cdot (2^{\sin x} - 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (7^{\sin x} - 1)^2 = 0$$

$$(2^{\sin x} - 7^{\sin x})^2 + (2^{\sin x} - 1)^2 + (7^{\sin x} - 1)^2 = 0$$

$$(2^{\sin x} - 7^{\sin x})^2 \geq 0, (2^{\sin x} - 1)^2 \geq 0, (7^{\sin x} - 1)^2 \geq 0$$

Значит, $2^{\sin x} = 7^{\sin x} = 1$

$$\sin x = 0$$

Действительно, при $\sin x = 0$ $2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = 2^0 + 7^0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
 $14^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x} = 14^0 + 2^0 + 7^0 = 1 + 1 + 1 = 3$

$$x = \pi \left(\frac{1}{2} + 2n \right) = \pi \frac{2n+1}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Нужно найти кол-во решений на отр. $[-3,14; 315]$.

~~$3,14 > 3,1415 > \pi - \frac{1}{2}\pi > -3,14 > -3,141 > \pi$~~
 ~~$315 > 10\pi \approx 314,159 > 11\pi > 315 > 314 > 10\pi$~~
 ~~$\frac{201}{2}\pi \approx 315 > 10\pi \frac{21}{2} = (100 + \frac{1}{2})\pi \approx 314,159 > 100\pi + \frac{1}{2}\pi > 100 \cdot 3,14 + \frac{1}{2} \cdot 3 =$~~
 ~~≈ 314~~

$$\frac{201}{2}\pi \approx (100 + \frac{1}{2})\pi = 100\pi + \frac{1}{2}\pi > 100 \cdot 3,14 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 314 + 1,5 = 315,5 > 315 > 100\pi$$

$$x = \pi \left(\frac{1}{2} + 2n \right) \in [-3,14; 315]; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} + 2n \in \left[-\frac{1}{2}; 100 \right]$$

$$2n \in \left[-1; \frac{199}{2} \right], n \in \mathbb{Z} \quad 2n \in \left[-1; \frac{199}{2} \right]$$

$$100 = \frac{200}{2}$$

~~$n \in [-1, 99], n \in \mathbb{Z}$. Целых чисел от 99 до 101: $99 - (-1) + 1 = 101$~~

Ответ: ~~101~~ $n \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{199}{4} \right], n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{199}{4} = 49 \frac{3}{4}$$

$n \in [0; 49], n \in \mathbb{Z}$. Целых чисел на этом промежутке 50.

Ответ: 50.

Исходник. $\sqrt{2}$

$$x^3 + (23 + 10\sqrt{3})x = (10 + \sqrt{3})x^2 + 23\sqrt{3}$$

$$x^3 - (10 + \sqrt{3})x^2 + (23 + 10\sqrt{3})x - 23\sqrt{3} = 0$$

По т. Виета $-abc = 23\sqrt{3}$, $ab+ac+bc = 23 + 10\sqrt{3}$, $-(a+b+c) = -10 + \sqrt{3}$

Объём параллелепипеда со сторонами $a+1$, $b+1$, $c+1$: $(a+1)(b+1)(c+1) =$

$$= abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = abc + (ab+ac+bc) + (a+b+c) + 1 =$$

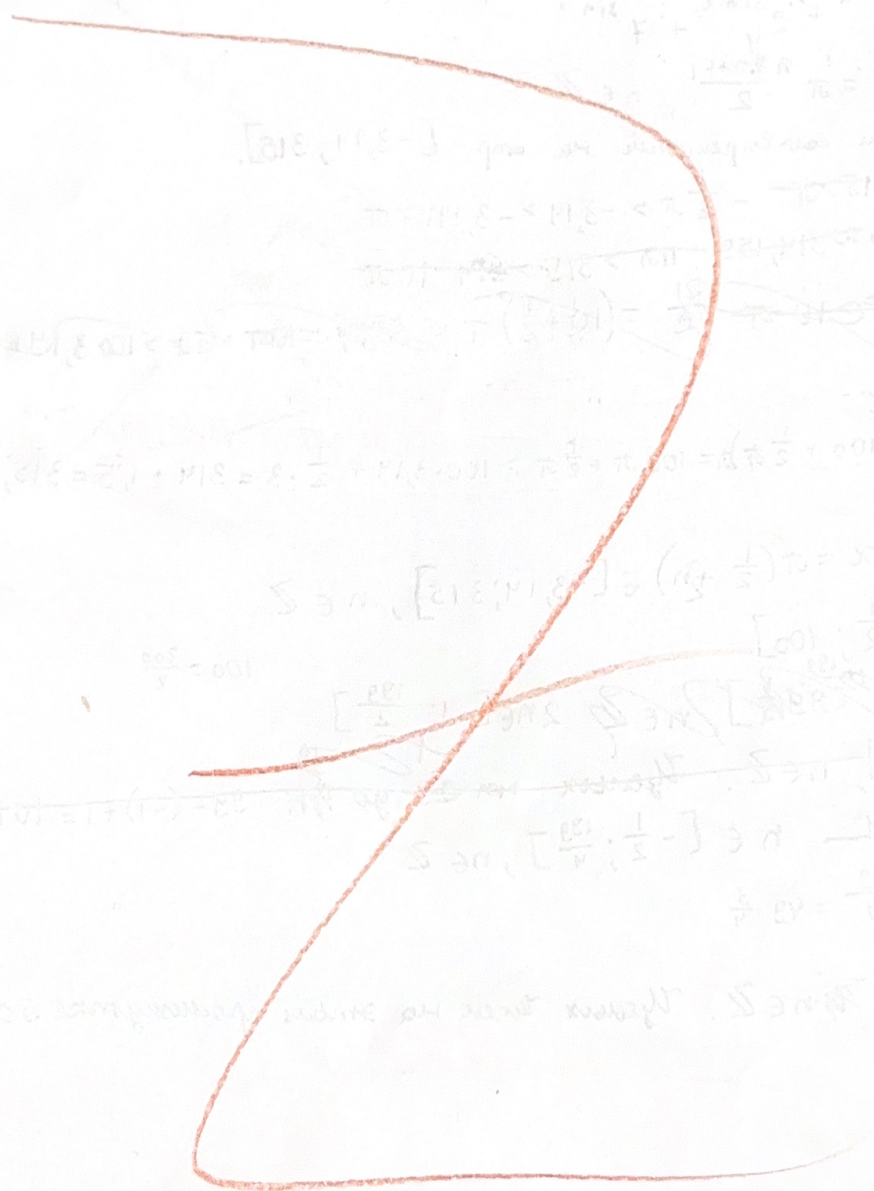
$$= -23\sqrt{3} + 23 + 10\sqrt{3} + 10 - \sqrt{3} + 1 = (-23 + 10 - 1)\sqrt{3} + 23 + 10 + 1 =$$

$$= -14\sqrt{3} + 34 = 14(1 - \sqrt{3}) = 23\sqrt{3} + 23 + 10\sqrt{3} + 10 + \sqrt{3} + 1 = (23 + 10 + 1)\sqrt{3} +$$

$$14(1 - \sqrt{3}) + 23 + 10 + 1 = 44\sqrt{3} - 34\sqrt{3} + 34$$

~~Объём параллелепипеда не бывает~~

Ответ: $34 + 34\sqrt{3}$.



Поставим. $AF = \sqrt{e^2 - b^2} = \sqrt{e^2 - (\frac{2}{3}a)^2} = \sqrt{\frac{25}{25}e^2 - \frac{4}{9}a^2} = \sqrt{\frac{16}{25}a^2} = \frac{4}{5}a$ Чуж 8

$FD = AD - AF = a - \frac{4}{5}a = \frac{1}{5}a$

то м. тип. для $\triangle BFD$ и $\triangle CFD$: $CF^2 + FD^2 = CD^2$

$(\frac{3}{5}a)^2 + (\frac{1}{5}a)^2 = 36$

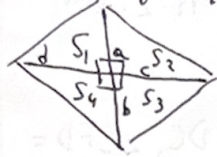
$\frac{9}{25}a^2 + \frac{1}{25}a^2 = 36$

$\frac{10}{25}a^2 = 36$

$\frac{2}{5}a^2 = 36$

$a^2 = 90$

Ф. плав. для 4-х. с пер. диаг.:



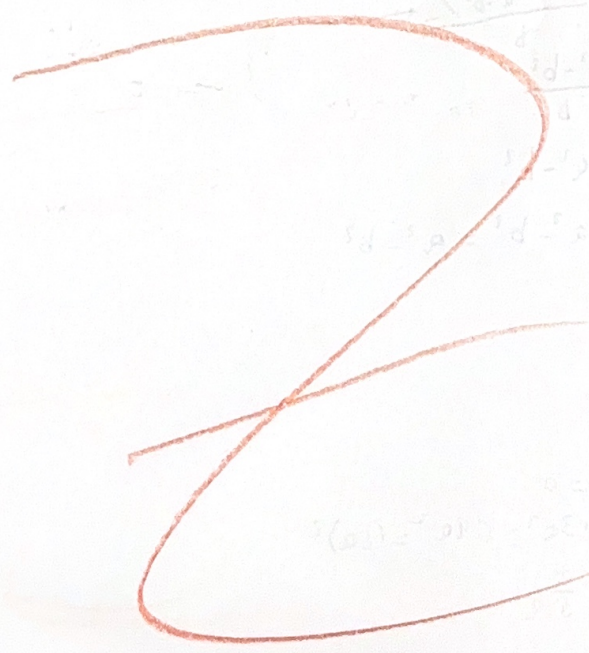
$S_1 = \frac{a \cdot d}{2}, S_2 = \frac{a \cdot c}{2}, S_3 = \frac{b \cdot c}{2}, S_4 = \frac{b \cdot d}{2}$
 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}(ad + ac + bc + bd) = \frac{1}{2}(a+b)(c+d)$

$S = \frac{1}{2} \cdot (AF + FD) \times (CF + BF) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (CF + BF) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\frac{3}{5}a + \frac{16}{15}a) = \frac{1}{2} a^2 (\frac{9}{15} + \frac{16}{15}) = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{25}{15} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6} a^2 =$

$= \frac{5}{6} \cdot 90 = \frac{450}{6} = 75$

Ответ: 75.

Еще раз обращаю ваше внимание, что C и D в моем решении переименованы друг в друга. Известно, это не выш (извините)



65-67-62-91
(184.4)

Таблица 5 из 8 $\sqrt{4}$
 Признак делимости на 11 — знакопеременная сумма цифр.
 Чтобы из десятичной записи числа получить его остаток при делении на 1, нужно вычислить знакопеременную сумму его общеизвестный признак (признак делимости на 11):
 Знакопеременная сумма цифр (разряд единиц — с плюсом) равна по модулю 11 той же десятичной записи числа равна по модулю ± 11 с числом.

~~783a~~ ~~793a~~ $\cdot 1609 \equiv 1 \pmod{11}$
 $(a-3+9-7)(9-0+b-1) \equiv 1 \pmod{11}$
 $(a-1)(b+8) \equiv 1 \pmod{11}$

Таблица ~~цифры~~ по модулю 11:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Не совсем ясно, что это в учебнике, составленное из 10^2 двузначное число: ab или ba , поэтому рассмотрим ab .
 Двузначных простых чисел вообще не так много:
 $11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97$

$11 \cdot ab = (11-1)(11+8) \equiv -1 \cdot 8 \equiv -8 \equiv 3 \not\equiv 1; ba:$

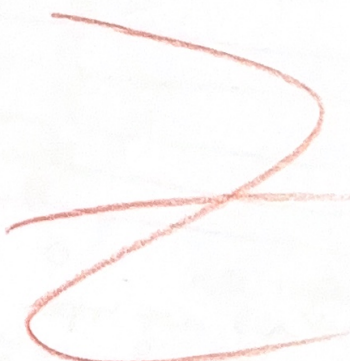
Таблица умножения по модулю 11:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	12	15	18	1	4	7	10
4	4	8	12	16	20	24	3	7	11	5
5	5	10	15	20	25	30	4	9	5	10
6	6	12	18	24	30	36	5	10	5	10
7	7	14	21	28	35	42	8	5	10	10
8	8	16	24	32	40	48	10	5	10	10
9	9	18	27	36	45	54	5	10	10	10
10	10	20	30	40	50	60	10	10	10	10

Вычеты по модулю 11 образуют поле, поскольку 11 — простое число, поэтому для каждого остатка ненулевого по модулю 11 вычета a по модулю существует ровно 1 вычет $\frac{1}{a}$ такой, что $a \cdot \frac{1}{a} \equiv 1 \pmod{11}$. Предъявим пары обратных вычетов по

модулю 11:
 $1 \cdot 1 = 1$
 $2 \cdot 6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$
 $3 \cdot 4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$
 $5 \cdot 9 = 45 \equiv 1 \pmod{11}$
 $7 \cdot 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$
 $10 \cdot 10 (= (-1)^2) = 100 \equiv 1 \pmod{11}$

Итак, есть 6 пар (a, b) с $ab \equiv 1 \pmod{11}$:
 1) $a-1 \equiv 1, b+8 \equiv 1$ $a-1 \equiv 1, b+8 \equiv 1$
 $a \equiv 2, b \equiv -7 \equiv 4$
 Или 24, или 42 — не простые.
 2) $a-1 \equiv 2, b+8 \equiv 6$



$$a \equiv 3, b \equiv -2 \equiv 9$$

Ни 93, ни 39 не простые

$$a-1 \equiv 6, b+8 \equiv 2$$

$$a \equiv 7, b \equiv -6 \equiv 5$$

Ни 75, ни 57 не простые.

$$3) a-1 \equiv 3, b+8 \equiv 4$$

$$a \equiv 4, b \equiv -4 \equiv 7$$

47 - простое! (74 - нет)

$$a-1 \equiv 4, b+8 \equiv 3$$

$$a \equiv 5, b \equiv -5 \equiv 6$$

Ни 56, ни 65 не простые.

$$4) a-1 \equiv 5, b+8 \equiv 9$$

$$a \equiv 6, b \equiv 1$$

61 - простое! (16 - нет)

$$a-1 \equiv 9, b+8 \equiv 5$$

$a \equiv 10$, не бывает такой цифры

$$5) a-1 \equiv 7, b+8 \equiv 8$$

$$a \equiv 8, b \equiv 0$$

~~80 не простое, 08 не двузначная пишется с ну~~

$$a-1 \equiv 8, b+8 \equiv 7$$

$$a \equiv 9, b \equiv -1 \equiv 10$$

Не бывает цифры $\equiv 10 \pmod{11}$

$$6) a-1 \equiv 10, b+8 \equiv 10$$

~~$a \equiv 11$, не бывает $a \equiv 11 \equiv 0, b+8 \equiv 2$~~

20 не простое.

Ответ: 47 и 61.

Поскольку $p_1 = p_2 = \dots = p_{12} = \frac{1}{12}$ штотвик. 1 8 из 8
 $\sum a_x p_x = \frac{1}{12} \sum a_x$

Аналогично, вер. числа за 1 ход - $\frac{1}{12} \sum b_x$,

вер. победы Васи за 1 ход - $\frac{1}{12} \sum c_x$.

$$\sum a_x = \frac{1+3+6+10+15+21+26+30+33+35}{36} = \frac{180}{36} = 5$$

$$\sum b_x = \frac{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

$$\sum c_x = \frac{36+35+33+30+26+21+15+10+6+3+1}{36} = \frac{216}{36} = 6$$

Вер. победы Тети за 1 ход $a = \frac{1}{12} \sum a_x = \frac{1}{12} \cdot 5 = \frac{5}{12}$, вер. числа на 1 ход $b = \frac{1}{12} \sum b_x = \frac{1}{12}$,

вер. победы Васи за 1 ход $c = \frac{1}{12} \sum c_x = \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{2}$.

А) Ответ: $\frac{5}{12}$.

Б). Предмет так а не выданы - числа во всех 3 ходах: $c^3 = \left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728}$
 Ответ: $\frac{1}{1728}$.

~~В) Вер. победы В. очевидно, что из $c > a$ следует, что вер. победы Васи больше.~~

Вер. победы Васи за 1 ход: Тети - a , Васи - c ; за 2 хода: Тети - va , Васи - vc ; за 3: Тети - v^2a , Васи - v^2c .

Вер. победы Вася Тети - $a + va + v^2a = (1+v+v^2)a$,
 Васи - $c + vc + v^2c = (1+v+v^2)c$.

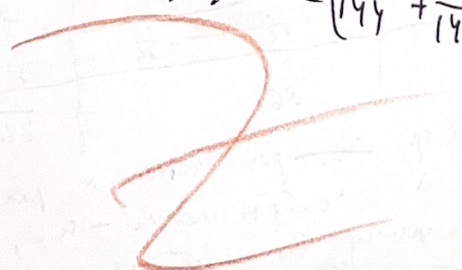
$$a < c \Rightarrow (1+v+v^2)c > (1+v+v^2)a$$

$$(1+v+v^2)c = \left(1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{157}{288}$$

$$\times \frac{1}{2} = \frac{157}{576} \cdot \frac{1}{2} = \frac{157}{1152}$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{144}{144} + \frac{12}{144} + \frac{1}{144} \times$$

Ответ: Васи, $\frac{157}{288}$.



$$\begin{matrix} 5a - 3b \\ \begin{matrix} \tau & \chi \\ \tau & \chi \end{matrix} \end{matrix}$$

$$7a - 5b$$

$$\text{mod } 84$$

Термевик

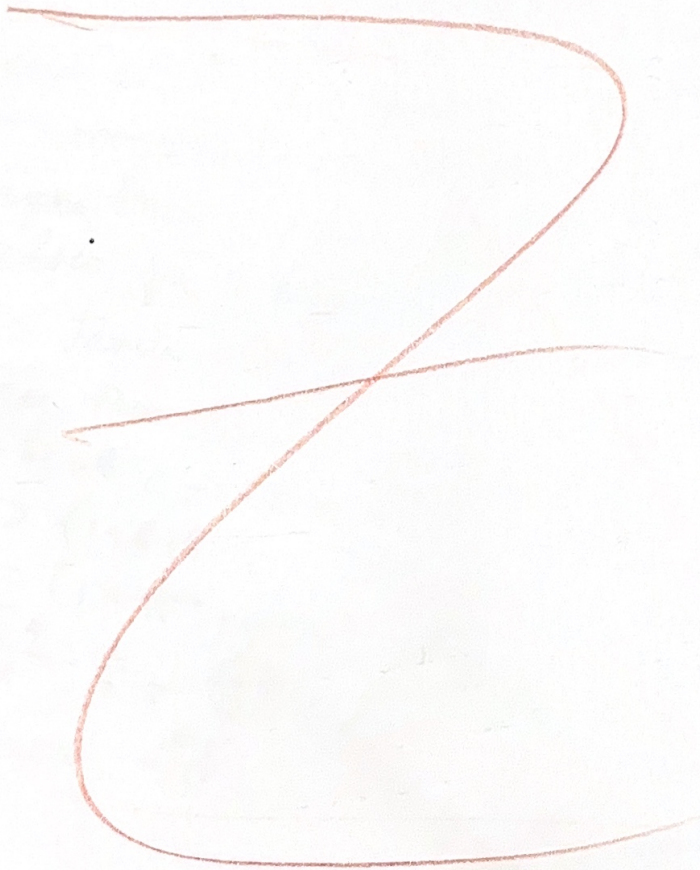
τ	τ	\rightarrow	τ	τ
τ	χ	\rightarrow	χ	χ
χ	χ	\rightarrow	τ	τ

$$5a - 3b + 7a - 5b = 12a - 8b \stackrel{2}{=} 4(3a - 2b)$$

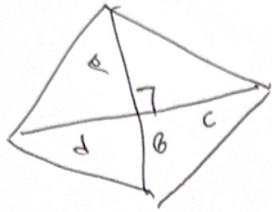
~~15a~~

$$5a - 3b - 7a - 5b - a - b = 11a - 9b$$

$$5a - 3b$$



Терновик.



$$\frac{ac}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{bd}{2} + \frac{ad}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (ac + bc + bd + ad) = \frac{1}{2} (a+b)(c+d)$$

$$x \cdot \left(x + \frac{x}{15} + \frac{3}{5}x \right) = \left(\frac{3}{5}x \right)^2 + \left(x - \sqrt{x^2 - \frac{9}{25}x^2} \right)^2 =$$

$$= x^2 \left(\frac{15}{15} + \frac{1}{15} + \frac{3}{5} \right) = \left(\frac{3}{5}x \right)^2 + \left(x^2 - \sqrt{\frac{16}{25}x^2} \right)^2 =$$

$$= x^2 \left(\frac{25}{15} \right) = x^2 \frac{5}{3} = 90 \cdot \frac{5}{3} = 150 = \left(\frac{3}{5}x \right)^2 + \left(x^2 - \frac{4}{5}x^2 \right)^2 =$$

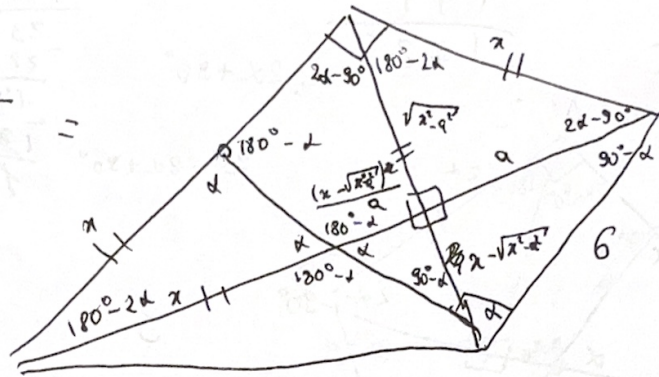
$$= \left(\frac{3}{5}x \right)^2 + \left(\frac{1}{5}x \right)^2 =$$

$$= \frac{9}{25}x^2 + \frac{1}{25}x^2 = \frac{10}{25}x^2 =$$

$$= \frac{2}{5}x^2$$

$$\frac{\left(\frac{1}{5}x \right)^2}{\frac{3}{5}x} =$$

$$= \frac{x}{15}$$



$$= \frac{2}{5}x^2$$

$$\frac{2}{5}x^2 = 36$$

$$x^2 = 90$$

$$x = \sqrt{90} =$$

$$= 3\sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - q^2}}{a} = \frac{x + \frac{(x - \sqrt{x^2 - q^2})^2}{a}}{\sqrt{x^2 - q^2}}$$

$$x^2 - q^2 = xq + \frac{(x - \sqrt{x^2 - q^2})^2}{a} =$$

$$= xa + x^2 - 2x\sqrt{x^2 - q^2} + x^2 - q^2$$

$$0 = xa + x^2 - 2x\sqrt{x^2 - q^2}$$

$$0 = q + x - 2\sqrt{x^2 - q^2}$$

$$2\sqrt{x^2 - q^2} = x + q$$

$$4x^2 - 4q^2 = x^2 + 2qx + q^2$$

$$3x^2 - 5q^2 = 2qx$$

$$5q^2 + 2qx - 3x^2 = 0$$

$$D = 4x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3x^2 = 64x^2 = (8x)^2$$

$$a_{1,2} = \frac{-2x \pm 8x}{10} =$$

$$= \frac{3}{5}x$$

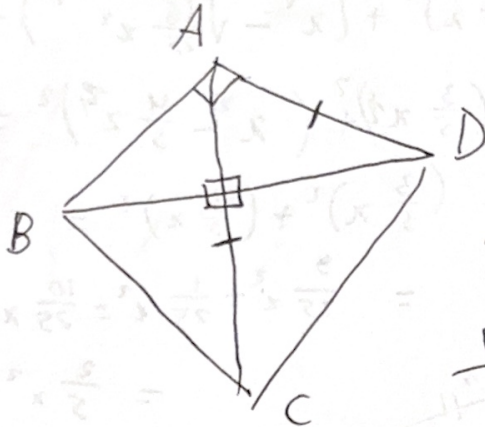
Термоблиц

$$2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = 14^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{2\sin x} - \frac{1}{2}$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1 =$$

$$= abc + (ab + ac + bc) + (a + b + c) + 1$$



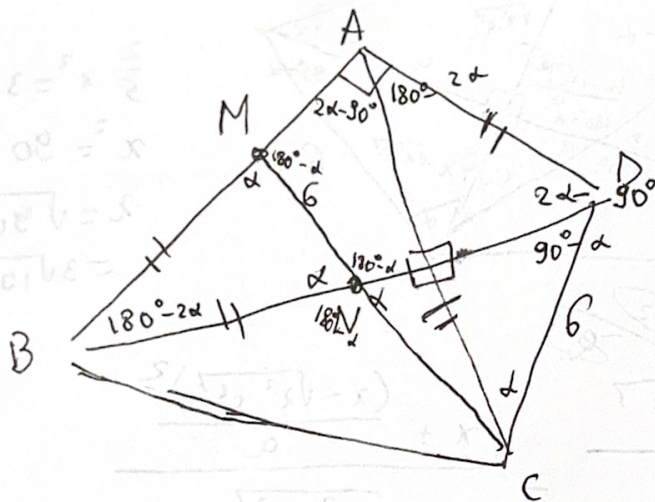
$$\begin{array}{r} 7934 \\ \times 1709 \\ \hline \end{array}$$

1709

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\alpha - 2\alpha + 90^\circ$$

$$\begin{array}{r} 7934 \overline{) 11} \\ \underline{77} \\ 23 \\ \underline{22} \\ 14 \\ \underline{13} \\ 1 \end{array}$$



$$90^\circ - 2\alpha + 90^\circ$$

3

ab

$$\overline{7930} \quad \text{и} \quad \overline{1609}$$



$$\begin{array}{r} 1709 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 60 \\ \underline{55} \\ 59 \\ \underline{55} \\ 4 \end{array}$$

(Large red scribble)