Выход: 12:18
Вернулся: 12:21
Доп. лист. 13:36
Сдача: 13:47

0 648692 690002

64-86-92-69
(185,4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс Е-1

Место проведения г. Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Златина Романа Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

64-86-92-69
(185.4)

Черновик

$1 - 0$

$2 - \frac{1}{36}$

$3 - 2 \cdot \frac{1}{36}$

$4 - 3 \cdot \frac{1}{36}$

$5 - \begin{matrix}(1;4)\\(4;1)\\(2;3)\\(3;2)\end{matrix}\ 4 \cdot \frac{1}{36}$

$$\left(2^{\sin x}\right)^2 + \left(7^{\sin x}\right)^2 + 1 = 2^{\sin x} \cdot 7^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

$$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$$

$6 - \begin{matrix}(3;3)\\(2;4)\\(1;5)\end{matrix}\ 5 \cdot \frac{1}{36}$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 = 2ab + 2a + 2b$$

$7 - \begin{matrix}(3;4)\\(2;5)\\(1;6)\end{matrix}\ 6 \cdot \frac{1}{36}$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = 0$$

$$x^3 + (23 + 10\sqrt{3})x - (10 + \sqrt{3})x^2 - 23\sqrt{3} = 0$$

$8 - \begin{matrix}(4;4)\\(2;6)\\(3;5)\end{matrix}\ 5 \cdot \frac{1}{36}$

$16 + 6 = 22 \quad +5 = 27$

$$a + b + c = -23 - 10\sqrt{3}$$

$\cancel{\sin^2\alpha} + \frac{1}{4\cos^2\alpha} - 1 + \cos^2\alpha$

$$ab + bc + ac = -10 - \sqrt{3}$$

$$abc = 23\sqrt{3}$$

$11 - 2 \cdot \frac{1}{36}$

$12 - 1 \cdot \frac{1}{36}$

$10 - \begin{matrix}(5;5)\\(6;4)\end{matrix}\ 3 \cdot \frac{1}{36}$

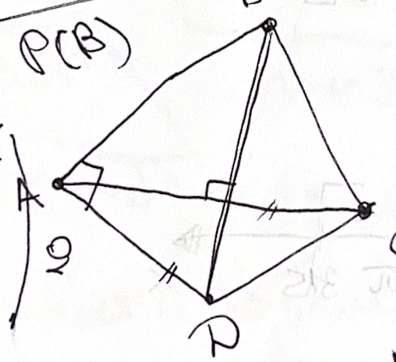
$9 - \begin{matrix}(5;4)\\(3;6)\end{matrix}\ 4 \cdot \frac{1}{36}$

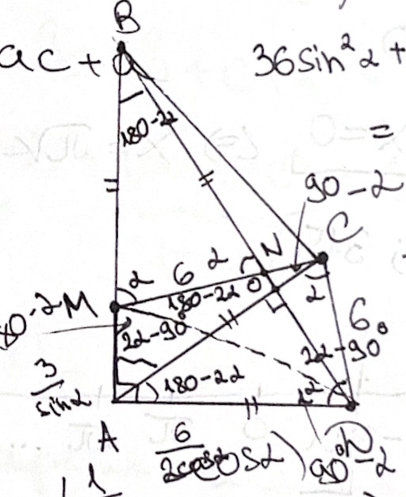
$$(a+1)(b+1)(c+1) = (ab + a + b + 1)(c + 1) =$$

$$= abc + ab + ac + a$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

$$36\sin^2\alpha + 36\left(\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}\right)^2 = \frac{36}{4\cos^2\alpha}$$





$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{6}{2\cos\alpha}}{AM}$

$AM = \frac{\frac{3}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos}}$

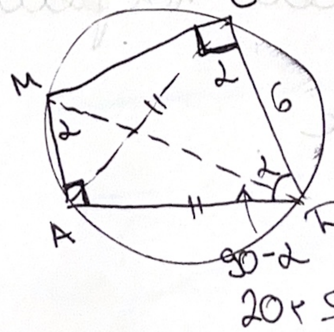
$1+2+3+4+5+6+6+4+3+2+1$

$$AO = 6\left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right)$$

AC^2

$$180^\circ - (180^\circ - \alpha) - (2\alpha - 90^\circ) =$$

$$= \alpha - 2\alpha + 90^\circ$$



$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}\ 2$

$OD = 6 \cdot \sin\alpha$

$OC = 6 \cdot \cos\alpha$

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin 2\alpha}$$

$NC = \frac{\sin\alpha}{6\cos\alpha}$

$20 + 50 + 80 + 30 = 180$

$$AD = \frac{6}{2\cos\alpha}$$

Чистовик

№1

$$(2^{\sin x})^2 + (7^{\sin x})^2 + 1 = 2^{\sin x}\cdot 7^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

] $2^{\sin x} = a$

$7^{\sin x} = b$ $\Rightarrow a^2+b^2+1 = ab+a+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2 = 2ab+2a+2b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1=0 \Leftrightarrow$

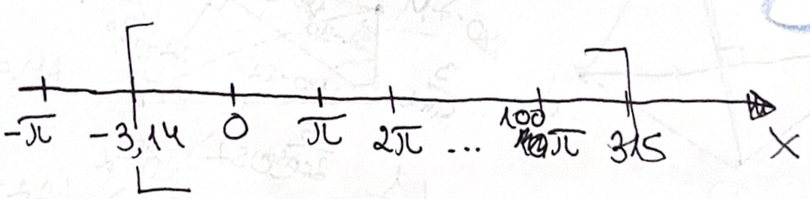
$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0$

Сумма квадратов равна 0 тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно 0.

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \Rightarrow \begin{cases} 2^{\sin x}=1 \\ \cancel{24}\,7^{\sin x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \underline{\sin x=0} \Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in \mathbb{Z}$

$[-3{,}14;\ 315]$



$\{0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots;\ 100\pi\}$ – всего 101 решение

Ответ: 101 решение

Чистовик

№ 2

$x^3+(23+10\sqrt{3})x=(10+\sqrt{3})x^2+23\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-(10+\sqrt{3})x^2+(23+10\sqrt{3})x-23\sqrt{3}=0$

По т. Виета

$$\begin{cases} a+b+c=10+\sqrt{3} \\ ab+bc+ac=23+10\sqrt{3} \\ abc=23\sqrt{3} \end{cases}$$

Объём параллелепипеда со сторонами $\{a+1; b+1; c+1\}$:

$V=(a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)(c+1)=$

$=abc+ab+ac+a+bc+b+c+1=$

$=\underbrace{abc}_{23\sqrt{3}}+\underbrace{(ab+bc+ac)}_{23+10\sqrt{3}}+\underbrace{(a+b+c)}_{10+\sqrt{3}}+1=$

$=23\cdot\sqrt{3}+23+10\sqrt{3}+10+\sqrt{3}+1=34\sqrt{3}+34$

Ответ: объём параллелепипеда может быть равен только $34\sqrt{3}+34$

Чистовик

№5

Вероятность выпадения ~~в~~ любого числа у Пети $p_п = \frac{1}{12}$

Вероятность выпадения суммы у Васи следует посчитать (на каждом кубике любое число может выпасть с вероятностью $\frac{1}{6}$)

$B=0$: $p=0$

$B=1$: $p=0$

$B=2$: $(1;1)$ $p=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$B=3$: $(1;2)(2;1)$ $p=2\cdot\frac{1}{36}$

$B=4$: $(2;2)(1;3)(3;1)$ $p=3\cdot\frac{1}{36}$

$B=5$: $(2;3)(3;2)(4;1)(1;4)$ $p=4\cdot\frac{1}{36}$

$B=6$: $(3;3)(4;2)(2;4)(1;5)(5;1)$ $p=5\cdot\frac{1}{36}$

$B=7$: $(3;4)(4;3)(1;6)(6;1)(2;5)(5;2)$ $p=6\cdot\frac{1}{36}$

$B=8$: $(4;4)(5;3)(3;5)(2;6)(6;2)$ $p=\overset{5}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{36}$

$B=9$: $(5;4)(4;5)(6;3)(3;6)$ $p=\overset{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{1}{36}$

$B=10$: $(5;5)(6;4)(4;6)$ $p=3\cdot\frac{1}{36}$

$B=11$: $(5;6)(6;5)$ $p=2\cdot\frac{1}{36}$

$B=12$: $(6;6)$ $p=\frac{1}{36}$

$B=13$: $p=0$

А) $\exists$ Петя набрал x очков $\Rightarrow$ необходимо найти вер-ть: $P(B<x \mid П=x)$

Чистовик

Т.к. события независимы:

$$P(B<x \cap П=x) = P(П=x) \cdot P(B<x)$$

$$P(П=x) = \frac{1}{12}$$

$$P(B<x) = P(B=0) + P(B=1) + \ldots + P(B=x-1)$$

Получив все такие суммы, их надо будет просуммировать, т.к. события несовместны

$\cancel{П=0}$ $П=1: \ p=0$

$П=2: \ p=0$

$П=3 \Rightarrow B=2 \quad p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12 \cdot 36}$

$П=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B=2 \\ B=3 \end{array}\right. \quad p = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36}\right) = \frac{3}{12 \cdot 36}$

$П=5: \ p = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36}\right) = \frac{6}{12 \cdot 36}$

$П=6: \ p = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36}\right) = \frac{10}{12 \cdot 36}$

$П=7: \ p = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36}\right) = \frac{15}{12 \cdot 36}$

$П=8: \ p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{12 \cdot 36}$

$П=9: \ p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} \cdot (1+2+3+4+5+6+5) = \frac{26}{12 \cdot 36}$

$П=10: \ p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} \cdot (1+2+3+4+5+6+5+4) = \frac{30}{12 \cdot 36}$

$П=11: \ p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} \cdot (1+2+3+4+5+6+5+4+3) = \frac{33}{12 \cdot 36}$

$П=12: \ p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} \left(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2\right) = \frac{35}{12 \cdot 36}$

$$P_{общ} = \frac{1+6+3+10+15+21+26+30+33+35}{12 \cdot 36} = \frac{180}{12 \cdot 36} = \frac{5}{12}$$

Б) Событие „Победитель не будет выявлен" складывается из: Чистовик

1) Победитель не будет выявлен после 1-го испытания

2) Победитель не будет выявлен после 2-го испытания при условии, что в 1й раз была ничья

3) Побед. не будет выявлен после 3-го испытания при условии, что в 1 и 2 раз была ничья

$$P_1 = P(П=2)\cdot P(B=2) + P(П=3)\cdot P(B=3) + \ldots + P(П=12)\cdot$$

$$\cdot P(B=12) = \underbrace{P(П)}_{\text{всегда } \frac{1}{12}} \underbrace{\left(P(B=2) + P(B=3) + \ldots + P(B=12)\right)}_{1} =$$

$$= \frac{1}{12}$$

$$P_2 = \left(P(П_2=2)\cdot P(B_2=2)\right)\cdot\left(P(П_1=2)\cdot P(B_1=2)\right) +$$

$$+ \left(P(П_2=3)\cdot P(B_3=3)\right)\cdot\left(P(П_1=2)\cdot P(B_1=2)\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(P(П_2=12)\cdot P(B_2=12)\right)\cdot\left(P(П_1=2)\cdot P(B_1=2)\right) +$$

$$+ \left(P(П_2=2)\cdot P(B_2=2)\right)\cdot\left(P(П_1=3)\cdot P(B_1=3)\right) +$$

$$+ \left(P(П_2=3)\cdot P(B_2=3)\right)\cdot\left(P(П_1=3)\cdot P(B_1=3)\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(P(П_2=12)\cdot P(B_2=12)\right)\cdot\left(P(П_1=12)\cdot P(B_1=12)\right) =$$

$$= P(П_1=2)\cdot P(B_1=2)\cdot\left(P(П_2=2)\cdot P(B_2=2) +\right.$$

$$\left. + \ldots + P(П_2=12)\cdot P(B_2=12)\right) + P(П_1=3)\cdot P(B_1=3)\cdot$$

$$\cdot\left(P(П_2=2)\cdot P(B_2=2) + \ldots + P(П_2=12)\cdot P(B_2=12)\right) +$$

$$\ldots + P(П_1=12)\cdot P(B_1=12)\cdot\left(P(П_2=2)\cdot P(B_2=2) + \ldots +\right.$$

$$\left. + P(П_2=12)\cdot P(B_2=12)\right) = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{144}$$

P_3 = аналогично = $\frac{1}{12^3}$ Чистовик

Заметим, что событие „Победитель так и не выявлен" равносильно событию „Победитель не будет выявлен после 3-го испытания при условии, что в 1и 2 раз была ничья" $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{\text{общ}} = P_3 = \frac{1}{12^3}$

В) Из пункта А):

P(Побед. в 1м раунде Петя) $= \frac{5}{12}$

Из пункта Б):

P(Ничья в 1м раунде) $= \frac{1}{12}$

$\Downarrow$

P(Побед. в 1м раунде Вася) $= 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$

Пользуясь формулой условной вер-ти

$P(\text{Петя}) = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{12^2} \cdot \frac{5}{12}$

$P(\text{Васи}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12^2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(\text{Васи}) > P(\text{Пети})$

$P(\text{Васи}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{144+12+1}{144} = \frac{157}{288}$

Черновик

$\overline{793a}$ $\overline{1b0g}$

$\overline{1b09}$

$7931 : 11 = 72$, ост. $1a$

$1209 : 11 = 109$, ост. 10

$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

$1009 : 11 = 91$, ост. 8

$7931 : 11 = 721$

$1309 : 11 = 119$, ост. 0

$a = 0 \Rightarrow \overline{793a} \equiv_{11} 10$

$a \neq 0 \Rightarrow \overline{793a} \equiv_{11} a-1$

$(7930 + a)(1009 + 100 \cdot b) = 80 + 800b + 8a + 100ab$

$\equiv_{11} 1$

$800b + 8a + 100ab \equiv_{11} -2 \equiv 9$

$8b + 8a + ab \equiv_{11} 9 \equiv 64$

$800 : 11 = 72$, ост. 8

$8b + 8a + ab = 20$

$7930 \cdot 1009 + 7930 \cdot 100b + 1009a + 100ab \equiv_{11} 1$

$80 + 10b + 8a + ab \equiv_{11} 1$

11
13
17

$\underbrace{(8+b)(10+a)}\equiv_{11} 1$

$17 \cdot 19 = 153$, 17

2 $\quad 99 \leq \ldots \leq 17 \cdot 19 = 323$

4 $\quad 100 = 10 \cdot 10$ ⊗ $\quad 144 = 12 \cdot 12 = 9 \cdot 16$ ($b=4$, $a=2$; $b=1$, $a=6$)

6 $\quad 111 = 3 \cdot 37$ $\quad 155 =$

8 $\quad 122 = 2 \cdot 61$ $\quad 33 - 15 = 18$

$133 =$ ⊗ $\quad 17 \cdot 13 \equiv 1$ $\quad \frac{44}{23}$

Чистовик

№4

$\overline{793a} = 7930 + a$

$\overline{1b09} = 1009 + 100b$ $\Rightarrow \left(\overline{793a} \cdot \overline{1b09} \underset{11}{\equiv} 1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (7930 + a)(1009 + 100b) \underset{11}{\equiv} 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underset{\substack{\parallel\!\mid \\ 10 \\ (\mathrm{mod}\,11)}}{7930} \cdot \underset{\substack{\parallel\!\mid \\ 8 \\ (\mathrm{mod}\,11)}}{1009} + \underset{\substack{\parallel\!\mid \\ 10 \\ (\mathrm{mod}\,11)}}{7930} \cdot \underset{\substack{\parallel\!\mid \\ 1 \\ (\mathrm{mod}\,11)}}{100}b + \underset{\substack{\parallel\!\mid \\ 8 \\ (\mathrm{mod}\,11)}}{1009}a + \underset{\substack{\parallel\!\mid \\ 1 \\ (\mathrm{mod}\,11)}}{100}ab \underset{11}{\equiv} 1$

$\Leftrightarrow 80 + 10b + 8a + ab \underset{11}{\equiv} 1 \Leftrightarrow (8+b)(a+10) \underset{11}{\equiv} 1$

~~Заметим, что число $(8+b)(a+10)$ – чётное~~

Заметим, что ни одно из чисел $\{a; b\}$ не может равняться нулю, т.к. $\left[\begin{array}{l}\overline{ab} - \text{простое} \\ \overline{ba} - \text{чётное}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8+b \geq 9 \\ 10+a \geq 11 \end{cases} \Rightarrow (10+a)(8+b) \geq 99$

В то же время $\begin{cases} a \leq 9 \\ b \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+10 \leq 19 \\ b+8 \leq 17 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (10+a)(8+b) \leq 19 \cdot 17 = 323$

~~Перебор: $(8+b)(a+10) = 100 = 10 \cdot 10$~~

Перебор: $a = 1 \Rightarrow a + 10 \vdots 11$ ⊗

$\underbrace{a = 2}$ $\Rightarrow a + 10 \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 8 + b \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow \underbrace{b = 4}$

не подходит

$\underbrace{a = 3}$ $\Rightarrow a + 10 \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 2(8+b) \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 16 + 2b \underset{11}{\equiv} 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b \underset{11}{\equiv} -15 \Leftrightarrow 2b \underset{11}{\equiv} 18 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 9 \Rightarrow \underbrace{b = 9}$

не подходит

$a = 4 \Rightarrow 3(8+b) \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 3b \underset{11}{\equiv} -23 \Rightarrow 3b \underset{11}{\equiv} 21 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 7$

Чистовик

Подойдёт число 47

$a=5 \Rightarrow 4(8+b) \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 4b \underset{11}{\equiv} -31 \Rightarrow 2b \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=6$ не подходит

$a=6 \Rightarrow 5(8+b) \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 5b \underset{11}{\equiv} -39 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=1$ Подойдёт число 61

$a=7 \Rightarrow 6(8+b) \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 6b \underset{11}{\equiv} -47 \Rightarrow 6b \underset{11}{\equiv} 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b \underset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow 3b \underset{11}{\equiv} 15 \Rightarrow b=5$

не подходит

$a=8 \Rightarrow 7(8+b) \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 7b \underset{11}{\equiv} -55 \Rightarrow 7b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=0$ не подходит

$a=9 \Rightarrow 8(8+b) \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 8b \underset{11}{\equiv} -63 \Rightarrow 8b \underset{11}{\equiv} 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3b \underset{11}{\equiv} 3 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} -1 \Rightarrow b=10$? не подходит

Т.о. простое число, составленное из ~~них~~ цифр $\{a;b\}$ может равняться 61 или 47

Ответ: 61 или 47

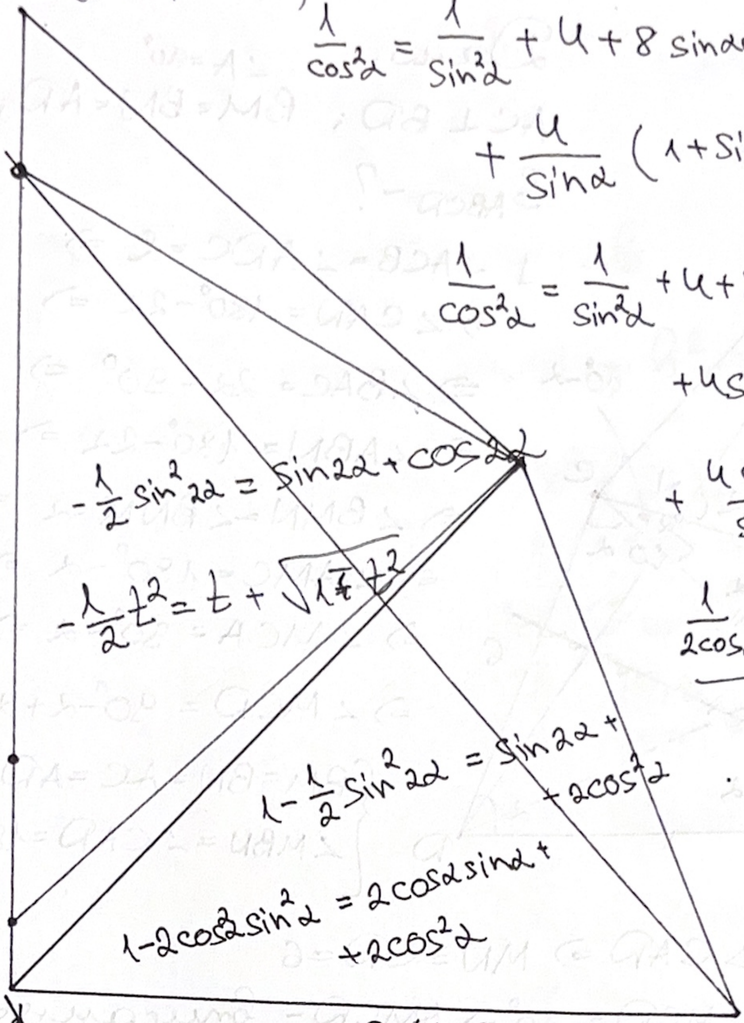
$AB = \frac{3(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$ Черновик

$\frac{6}{\frac{6}{2\cos\alpha}} = \frac{6*(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{\frac{3(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}}$

$MC = 6(1+\sin\alpha\cos\alpha)$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + 4 + 8\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \frac{4}{\sin\alpha}(1+\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + 4 + 8\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha} + 4\cos^2\alpha$$



$-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$

$-\frac{1}{2}t^2 = t + \sqrt{1-t^2}$

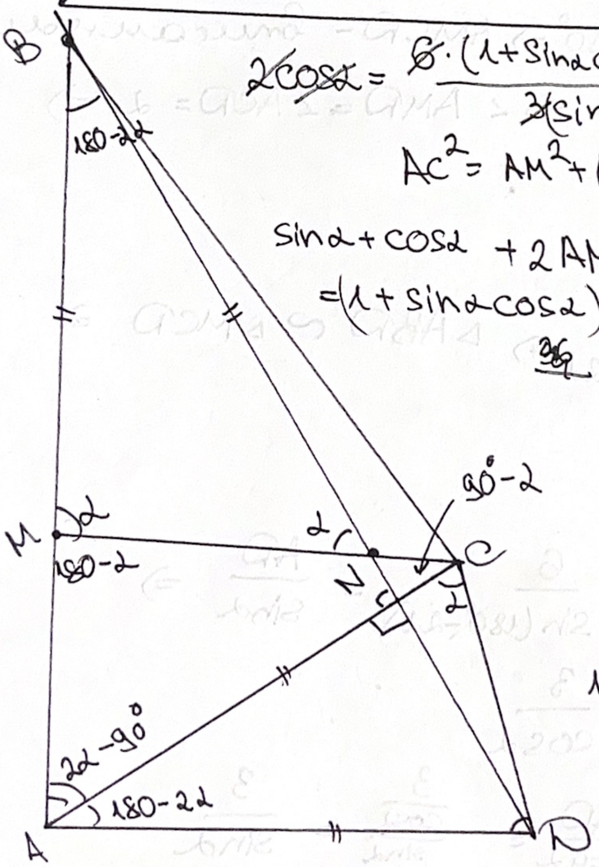
$$\frac{\frac{1}{2\cos\alpha}-\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cancel{6}\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\frac{3}{\cos\alpha}}{\left(\frac{3}{\cos\alpha}+\frac{3}{\sin\alpha}\right)} = 1$$

$1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha$

$1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha + 2\cos^2\alpha$

$\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot$

$$\cancel{2\cos\alpha} = \frac{\cancel{6}\cdot(1+\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{3}(\sin\alpha+\cos\alpha)}\cdot\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}} = 1$$



$AC^2 = AM^2 + (6+6\sin\alpha\cos\alpha)^2 + 2AM\cdot(6+6\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\cos\alpha$

$\sin\alpha+\cos\alpha$

$=(1+\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$

$\cancel{\frac{36}{9}}$

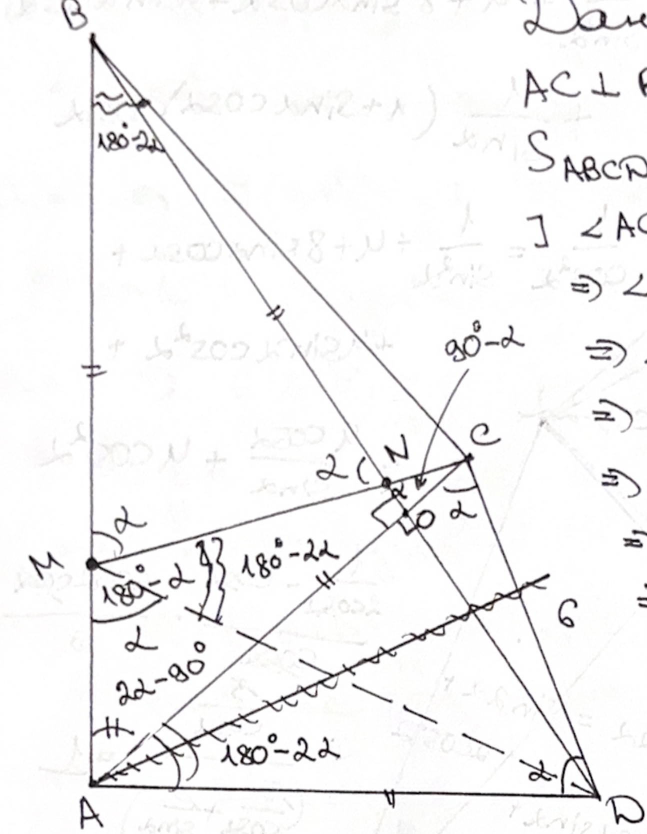
$$\frac{9}{\cos^2\alpha} = \frac{9}{\sin^2\alpha} + 36(1+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha) + 2\cdot\frac{3}{\sin\alpha}\cdot 6\cdot(1+\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\cos\alpha$$

$\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 1$

$1-2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha + 2\cos^2\alpha$

Чистовик

№ 3



Дано: $\angle A = 90°$

$AC \perp BD$; $BM = BN = AD$; $DC = 6$

S_{ABCD} – ?

] $\angle ACB = \angle ADC = \alpha$ ⇒

⇒ $\angle CAD = 180° - 2\alpha$ ⇒

⇒ $\angle BAC = 2\alpha - 90°$ ⇒

⇒ $\angle ABN = 180° - 2\alpha$ ⇒

⇒ $\angle BMN = \angle BNM = \alpha$ ⇒

⇒ $\angle AMC = 180° - \alpha$ ⇒

⇒ $\angle MCA = 90° - \alpha$ ⇒

⇒ $\angle MCD = 90° - \alpha + \alpha = 90°$

$$\begin{cases} BM = BN = AC = AD \\ \angle MBN = \angle CAD = 180° - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

⇒ $\Delta MBN = \Delta CAD$ ⇒ $MN = CD = 6$

Т.к. $\angle MAD = \angle MCD = 90°$ ⇒ AMCD – вписанный четырёхугольник ⇒ $\angle AMD = \angle ACD = \alpha$ ⇒

⇒ $CMD = 180° - 2\alpha$

X ΔABD и ΔMCD

$$\begin{cases} \angle MCD = \angle BAD = 90° \\ \angle ABD = \angle CMD = 180° - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta MCD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{MC}{AB}$$

ΔACD:

По т. синусов: $\frac{6}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{AD}{\sin\alpha}$ ⇒

$$\Rightarrow AD = \frac{6\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{3}{\cos\alpha}$$

ΔAMD:

$$tg\alpha = \frac{AD}{AM} \Rightarrow AM = \frac{AD}{tg\alpha} = \frac{\frac{3}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{3}{\sin\alpha}$$

△

Чистовик

$\triangle NCD$:

$$tg\,\alpha = \frac{6}{NC} \Rightarrow NC = \frac{6\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ;\ NO = NC \cdot \cos\alpha = \frac{6\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

~~Тогда:~~

$$\cancel{\frac{6}{\frac{3}{\cos\alpha}} = \frac{6 + 6\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{3}{\cos\alpha} + \frac{3}{\sin\alpha}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\quad}}$$

$\triangle OCD$:

$$OD = 6\sin\alpha\ ;\ OC = 6\cos\alpha$$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC\cdot BD$ (диагонали взаимно-перпендикулярны)

$$AC = \frac{3}{\cos\alpha},\ BD = BN + NO + OD = \frac{3}{\cos\alpha} + \frac{6\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + 6\sin\alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\cos\alpha}\cdot\left(\frac{3}{\cos\alpha} + \frac{6\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + 6\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{9}{2\cos^2\alpha} + \frac{9\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{9\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{9}{2}\left(tg^2\alpha + 1\right) + \frac{9}{tg\,\alpha} + 9\,tg\,\alpha$$