0 394188 660003

39-41-88-66
(161.4)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Смена ручки 12:46

Вариант ______________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Костина Матвея Артемовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

Кос

Чистовик лист 1 из 6

№1

x – v пешехода км/ч

y – v велосипедиста км/ч

Из усл. до встречи пешеход ехал 1ч. 15 мин = 1,25 ч.

а велосип. 15 мин = 0,25 ч.

Они встретились → $x \cdot 1{,}25 = y \cdot 0{,}25$

$$\frac{5x}{4} = \frac{y}{4} \ \Big| \cdot 4$$

$$5x = y$$

Пусть они встретились в 10:00 → пешеход шел $10{:}00 - 9{:}15 =$

$= 45$ мин. $= 0{,}75$ ч. →

→ прошел всего $0{,}75x = \frac{3x}{4}$

Т.к они встретились → велосип. проехал тоже расст. →

→ $\frac{3x}{4}$ проехал со скор. $y = 5x$ → затр. врем. $\frac{3x}{4} : \frac{5x}{1} =$

$= \frac{3x}{20x} = \frac{3}{20}$ ч. $= \frac{9}{60}$ ч. $= 9$ мин.

Ехал 9 мин до 10:00 → выехал в $10{:}00 - 0{:}09 = 9{:}51$

Ответ: в 9:51

№3

Посмотрим на ст. вхожд 5 в 26! это 5, 10, 15, 20, 25 →

→ ст. вх. 5 – 6 → т.к ст. вх. 2 в 26! > 6 (наприм

из-за $2, 2^2, 2^3, 2^4$) → ~~посл.~~ $26! \vdots 2^6 \cdot 5^6$ → $26! \vdots 10^6$ →

→ 6 посл. цифр 26! это 0-и → $c, d = 0$

Посмотрим на кратность 9 $26! \underset{9}{\equiv}$ с суммой цифр 26!

$26! \underset{9}{\equiv} 4 + 0 + 3 + 2 + 9 + 4 + 1 + 6 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 0 + 5 + 6 + 3 + 5 + 5 + a + b + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv$

$\underset{9}{\equiv} 4 + 2 + 4 + 1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 5 + 5 \underset{9}{\equiv} (4 + 4 + 4) + 3 + 15$

$\underset{9}{\equiv} 9 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + a + b \underset{9}{\equiv} 6 \cdot 3 + 8 + 4 + 3 + a + b \underset{9}{\equiv} 18 + 15 + a + b \underset{9}{\equiv} 6 + a + b$ →

→ $a + b \underset{9}{\equiv} 3$

чистовик лист 2 из 6

№3

также посмотрим на кратность 11:

это знако перемен. сумма с конца к началу, чередуя − и +

$\underbrace{4-0}+3-2+9-\underbrace{4+1}-6+\underline{1-1}+2-\underline{6+6}-\underbrace{0+5}-6+3-\underbrace{5+5}-a+b-\underbrace{0+0-0+0-0}\equiv$

$\equiv_{11}\underbrace{3-2}_{-1}+\underbrace{9-1}_{-10}-\underbrace{6+2}_{4}-\underbrace{5-6+}_{1}\underbrace{3}_{-3}-a+b-\equiv_{11}\underbrace{-1+(10)}_{-11}+\underbrace{4+1-3}_{2}+a-b\equiv_{11}$

$\equiv_{11} 2+a-b \rightarrow a-b\equiv_{11} 9$

Тогда $a+b\equiv_9 3$ и $a-b\equiv_{11} 9$, $a,b\in\mathbb{N}_0$ и $0\le a,b\le 9\rightarrow$

$\rightarrow 0\le a+b\le 18 \equiv_9 3 \rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=3\\ a+b=12\end{array}\right.$

$0\le a,b\le 9$ $a,b\in\mathbb{N}$

• $a+b=3$

a	b	$a-b$
0	3	−3
1	2	−1
2	1	1
3	0	3

$\not\equiv_{11} 9$

• $a+b=12$

a	b	$a-b$
9	3	6
8	4	4
7	5	2
6	6	0
5	7	−2 $\rightarrow\equiv_{11} 9$
4	8	−4
3	9	−6

$6, 4, 2, 0 \not\equiv_{11} 9$; $-4, -6 \not\equiv_{11} 9$

$\rightarrow a;b=5;7$

$26!\ \vdots\ 11$ и $26!\ \vdots\ 9$ т.к в его разл. входит и 11, и 9 по опр. факториала.

Ответ: $a=5$; $b=7$; $c=d=0$

№4

посмотрим, что происходит с суммой 2-х чисел после каждой операции над ними $a,b\rightarrow a+b$

$5a-3b,\ 7a-5b\rightarrow \underbrace{12a-8b}_{\vdots 4}$

А.т.к каждое число поменялось, то если такое возможно, то сумма конечн. чисел должна быть $\vdots 4$, но она

$\frac{(2026+1)\cdot 2026}{2}-\frac{(2000+1)\cdot 2000}{2}=\underbrace{2027\cdot 1013}_{\not\vdots 2}-\underbrace{(2001)\cdot 1000}_{\vdots 2}\not\vdots 2\rightarrow$

$\rightarrow\not\vdots 4$ Ответ: нет, нельзя

39-41-88-66 (161.4)

~~Чист~~ Чистовик лист 3 из 6

№2

$n(n+4001)$ $n \in N$

Пусть такое возможно тогда $n(n+4001) = x^2$

~~$n(n+4001) \vdots n \to x^2 \vdots n$~~

~~Посмотрим на НОД $(n, n+4001) = (n, 4001+n-n) = (n, 4001)$~~

~~Пусть $n \vdots 4001 \to (n, n+4001) = 1$~~ ~~отсюда~~

Пусть $n = 4001k \to n(n+4001) = 4001k(4001k+4001) =$

$= 4001^2(k^2+k) = x^2$ $k \geq 1$

$\Downarrow$

k^2+k - кв., но $k^2 < k^2+k \overset{<}{=} k^2+2k+1 = (k+1)^2 \to$

$\to k^2+k$ - не кв. т.к $k \geq 1$ $\Downarrow \to$

$\to n \not\vdots 4001 \to (n, n+4001) = (n, 4001+n-n) = (n, 4001) = 1$

$n(n+4001) = x^2 \to n = a^2$, $n+4001 = b^2$ $(a,b)=1$ $a,b \geq 1$ (т.к скобки взаимопросты и в произв. дают кв.)

$n = a^2$ $n+4001 = b^2 = 4001 + a^2$ ~~$b^2 - a^2 \to b > a \to b > a$~~

$(b-a)(b+a) = 4001$ ~~$(a-b)(a+b) = 4001$~~
$b-a < b+a$

$\Downarrow$

$b-a = 1$ $b+a = 4001$ т.к 4001 - прост.

~~Но отриц. число не равно положит. числу, против. $\to$ таких n не сущ.~~

~~Ответ: таких n не существует.~~

$b = a+1 \to b+a = 4001 = 2a+1$

$a = 2000$

$n = a^2 = 2000^2 = 4 \cdot 10^6$

Ответ: $n = 4 \cdot 10^6$

чистовик лист 4 из 6

№6

Пусть a, b – кол-во людей в 1 и 2 группах соотв.

v – произв. 1ого человека, шт/ч.

t – ч. времени прошло с нач. работы, когда 2 группа закончила

o_1, o_2 – ч., врем. на обед у 1ой и 2ой групп соотв.

Тогда из условия: $a+b=49$

$t+1$ – когда зак. ~~1~~ 1 группа

Тогда $av(t+1-o_1) = \cancel{bv(t+1)} = bv(t-o_2)$ (1)

Если 1 без перерыва $\to av(t+1) = 1\frac{3}{4}bv(t-o_2) = \frac{7}{4}bv(t-o_2)$ (2)

Если 2 без перерыва $\to bv(t) = \frac{5}{3}av(t+1-o_1)$ (3)

Пронумеруем равенства (сбоку)

Домножим 1 на $\frac{7}{4}$, тогда $\frac{7}{4}av(t+1-o_1) = \frac{7}{4}bv(t-o_2) =$

откуда из 2го $= av(t+1) \to$

$\to \frac{7}{4}av(t+1-o_1) = av(t+1) \quad |:v$

$\frac{7}{4}a(t+1) - \frac{7}{4}ao_1 = \frac{4}{4}a(t+1)$

$\frac{3}{4}a(t+1) = \frac{7}{4}ao_1 \quad |\cdot\frac{4}{a}$

$3(t+1) = 7o_1$

$o_1 = \frac{3}{7}(t+1)$

Домножим 1 на $\frac{5}{3}$, тогда $\frac{5}{3}av(t+1-o_1) = \frac{5}{3}bv(t-o_2) =$

откуда из 3его $= bvt \to$

$\to \frac{5}{3}bv(t-o_2) = bvt \quad |:bv$

$\frac{5}{3}(t-o_2) = \frac{3}{3}t$

$\frac{5}{3}t - \frac{5}{3}o_2 = \frac{3}{3}t$

$\frac{2}{3}t = \frac{5}{3}o_2$

$2t = 5o_2$

$\frac{2t}{5} = o_2$ (4)

$a+b=49 \quad b=49-a$

(3) $bvt = \frac{5}{3}av(t+1-o_1) \quad |:v$

$(49-a)t = \frac{5}{3}a\left(t+1-\frac{3}{7}(t+1)\right)$

$49t - at = \frac{5}{3}a\left(\frac{4}{7}t + \frac{4}{7}\right) = a\left(\frac{20}{21}t + \frac{20}{21}\right) \quad 49t = a\left(\overset{1\,21}{t} + \frac{20t}{21} + \frac{20}{21}\right)$

Чистовик лист 5 из 6

№6

$\cancel{a = 49t}$ $\quad 49t = a\left(\frac{41t+20}{21}\right)$

$$a = \frac{49\cdot 21t}{41t+20} \quad (5)$$

Из (4) $O_2 = \frac{2t}{5}$, а также из усл. $1 \le O_2 \le \frac{4}{3}$

$$O_2 = \frac{2t}{5}$$

$$1 \le \frac{2t}{5} \le \frac{4}{3} \quad |\cdot 5$$

$$5 \le 2t \le \frac{20}{3}$$

$$2{,}5 \le t \le \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \quad (6)$$

(5) $a = \frac{49\cdot 21t}{41t+20}$ $\quad$ ~~$a, b > 0,\ b = 49 - a - b$ $\quad a \in [0; 49]$~~

~~$49 \ge a \ge \frac{49\cdot 21t}{41t+20}$~~

~~$49(41t+20) \ge 49\cdot 21t$~~

~~$41t+20 \ge 21t$~~

~~$20t+20 > 0\ \forall$~~

Подставим полученные границы для t (6) (*)

меньш. t

$t = 2{,}5$ $\quad a = \frac{49\cdot 21\cdot 2{,}5}{41\cdot 2{,}5+20} = \frac{2572{,}5}{122{,}5} = 20$

больш. t

$t = \frac{10}{3}$ $\quad a = \frac{\frac{49\cdot 7\cdot 3\cdot 10}{3}}{\frac{41\cdot 10}{3}+20} =$

$$= \frac{3430}{\frac{410+60}{3}} = \frac{3430\cdot 3}{470} = \frac{1029}{47} < 22 \rightarrow$$

$\rightarrow 20 < a < 22\ \forall,\ a \in \mathbb{N} \rightarrow a = 21$

Ответ: $a = 21$

~~Потребуем~~ Докажем, что (*) при увел t увел. a

пусть при 1ое зн t, а 2ое зн. $t+x$, $x>0$. Тогда хотим сравнить

$$\frac{7^3\cdot 3t}{41t+20} \overset{?}{<} \frac{7^3\cdot 3(t+x)}{41(t+x)+20}$$

$$7^3\cdot 3\cdot 41t^2 + 7^3\cdot 3^{\cdot 41}tx + 20\cdot 7^3\cdot 3t \overset{?}{<} 41\cdot 7^3\cdot 3t^2 + 41\cdot 7^3\cdot 3x + 20\cdot 7^3\cdot 3t + 20\cdot 7^3\cdot 3\cdot x$$

$$0 < 20\cdot 7^3\cdot 3\cdot x \quad (\text{т.к. } x>0)$$

Чистовик лист 6 из 6

№5

Оценим площадь каждого из ~~во~~ 8ми угольников, для этого обозначим x – кол-во узлов сетки внутри восьмиугольника

y – кол-во узлов сетки на границах

Тогда $S_{8\text{миуг}} = x + \frac{y}{2} - 1$ по формуле Пика

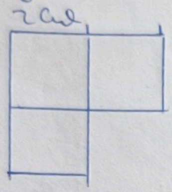
(т.к разрезы ~~по~~ по линиям сетки → все вершины в узлах сетки) $x \geq 0$, $y \geq 8$ (т.к ~~8~~ 8миуг.) $\to S \geq 0 + \frac{8}{2} - 1 = 3$

Покажем, что 3 невозможно:

т.к разрезы только по линиям сетки → каждый квадрат целиком входит в 1ин из восьмиугольников →

→ Площади 3 возможны 2 фигуры (в силу условий разрезания)

1ая 2ая

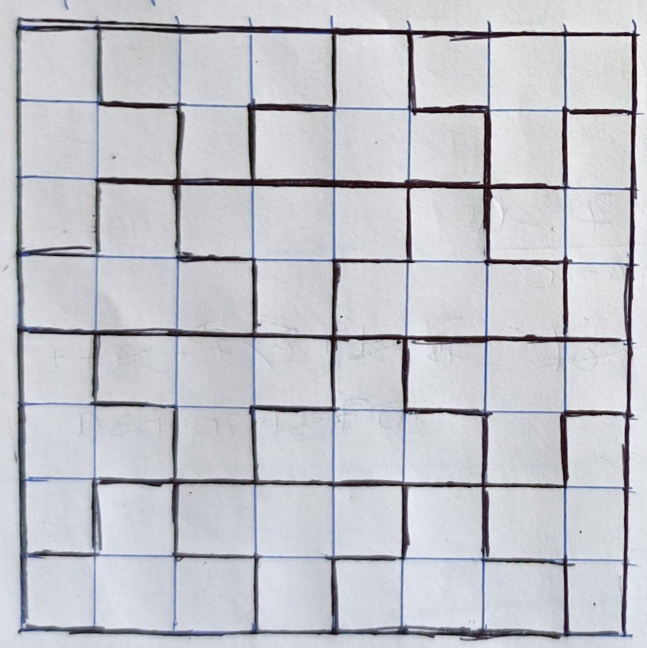


но ни в 1 из них не 8 вершин

→ чтобы еще ~~1~~ 1 квадрат входит в восьмиуг. →

$\to S_{8\text{миуг.}} \geq 4$ $S_{\text{кв}} = 64 \to n_{8\text{миуг.}} \leq \frac{S_{\text{кв}}}{S_{8\text{миуг}}} = \frac{64}{4} = 16$

Пример:



Переход площади от 3 к 4 верен в силу разрезания по линиям сетки → каждый квадрат целиком входит в 1 из 8ми угольников → площадь каждого целая, а т.к 3 невозм. → площадь каждого ≥ 4

90 (девяносто)

39-41-88-66 (161.4)

Черновик

$a+b$ $12a-8b$ 15, 16, 17 … 40

$4+3+2+2+4+1+1+1+1+2+5+10+5+5+5$

9:15

10:15

$x - v$ м. $y - v$ вел.

$x \cdot 1{,}25 = y \cdot 0{,}25$

$a-b$ $5a-3b-7c=5b$

$2b-2a=2(b-a)$

$(n+2001)^2 = n^2+4002n+2001^2$

$n(n+4001) = n^2+4001n$

$n : p$ $n+4001 : p \to p = 4001$

$n^2+4001n = x^2$

$n^2+4000n+4000000-4000000+n$

$(n-x)(n+x) = -4001n$

$S-(a+b)+(12a-8b)$

$(n+2000)^2 - 4000000 + n = (n+x)^2$

$(n, n+4001) = (n, 4001)$

$n^2+4001n$

$\left(\frac{-4001}{2}\right)^2 + \frac{4001 \cdot -4001}{2}$

$\frac{4001^2}{4} - \frac{2 \cdot 4001^2}{4} = -\frac{4001^2}{4}$

13 79

24 90

-35

-46

-57

-68

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

$26 = $ 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

$n+4001 : p^2$ $ab \to x+y : 4$ 5 5^2

$a_1, a_2, \dots, a_{26}$

$n : p^2$ $x_1+x_2 : 4$

$n = 4001k$ $k \geq 1$ $-(2000{,}25)^2$

$2(4001)(4001)$ $26-1+1$

n - кв. $\to n+4001$ кв.

$n = x^2$ $n = x^2+4001$

$4001k \cdot 4001(k+1) = x^2$

$S-a-b+5a-3b+7a-5b = S+11a-9b$

$4001^2(k^2+k)$

$k^2-2k+1 < k^2+k < k^2+2k+1$

$S, S+11a-9b$

$a+b \to 12a-8b$ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \dots a_{26}$

x_1, x_2

2001, 2002, 2003, 2004 :4 5 6

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

$\frac{27 \cdot 26}{2}$

$x, y \to a+b, c$:4

a, b :4 b, c :4

$b, c \to b+c : 4$

черновик

$n^2+4001n \vdots 2$

$n(4001+n)$

$n(n+4001)$

$n \vdots 4$ 1 2 0

$n \equiv 3$ 3 0

$n=a^2$ $n+4001=b^2$

$(b-a)(b+a)=4001$

$b-a<b+a$

$n^2+4000n+2000^2+n-2000^2$

$(n+2000)^2+n-2000^2$

$(n+k)(n-k)=n^2-k^2$

k $k+1$ $k+2$

$\cancel{(n+4001)^2-n^2=4001}$

$(4001)^2-n^2=(n+4001)(4001-n)$

$\frac{(4001)^2-n^2}{4001-n}=n+4001$

k^2 k^2+2k+1

k $k+2x$

$-k^2+k^2+4kx+4x^2$

$4kx+4x^2 \equiv$

$\equiv kx+x^2$

$x(k+x)$

$(n+\frac{4001}{2})^2-(\frac{4001}{2})^2 n^2+4001n$ $=x^2$

$(n+2000)^2$

$n^2+4000n+2000^2$

$(n+\frac{4001}{2})^2-(\frac{4001}{2})^2=x^2$

$(n^2+\frac{4001}{2})^2=x^2+(\frac{4001}{2})^2$

$n>2000^2$

$n>2000^2$

$(n+2001)>n^2+4001n>(n+2000)^2$

a, b кол-во людей в группах $n<2000^2$

v - произв. 1 волонт. $n^2+4001n$

O_1 t - раб. вторая 1 2^2 3^2 5^2 7^2 11^2

O_2 $t+1$ - раб первая

$2\cdot3\cdot5\cdot7$

6 30 210

$va(t+1-O_1)=vb(t-O_2)$

$a(t+1-O_1)$

$\cancel{at+a}=b(t-O_2)$

≤ 4 пр.

$\cancel{2\cdot4002=4\cdot2001}$ 4002

$(n+\frac{4001}{2})^2-(\frac{4001}{2})^2=x^2$

$(n+\frac{4001}{2})^2-(\frac{4001}{2})^2$

$(n+\frac{4001}{2})^2-(2000{,}5)^2=x^2$

$n(n+4001)=n^2k^2$ $k\geq1$

$4002 \equiv_n n+4001=nk^2\equiv_n 0 \to 4001 \vdots n$

$n=0,1$ $n=1$ $n=4001$

Черновик

a,b кол-во людей в 1 и 2 $a+b=49$ $b=49-a$

v - произв. каждого

O_1, O_2 - вр на обед 1 и 2 группы соотв. $1 \le O_1 \le \frac{4}{3}$

t - вр. закс. раб. 2 гр.

$vb(t-O_2) = va(t+1-O_1)$ | $\frac{7}{4}$ $\frac{7}{4}b(t-O_2)=\frac{7}{4}a(t+1-O_1)$

| $\frac{5}{3}$ $\frac{5}{3}b(t-O_2)=\frac{5}{3}a(t+1-O_1)$

$va(t+1) = \frac{7}{4}vb(t-O_2)$

$\frac{5}{3}va(t+1-O_1) = \frac{5}{3}(t) \; t = \frac{5}{3}(t-O_2)$

$t = \frac{5}{3}t - \frac{5}{3}O_2$

$\frac{5}{3}O_2 = \frac{2t}{3}$ $1 \le O_2 = \frac{2t}{5} \le \frac{4}{3}$

$5 \le 2t \le \frac{20}{3}$

$2{,}5 \le t \le \frac{10}{3}$

$a(t+1) = \frac{7}{4}a(t+1-O_1)$

~~$at+a = \frac{7at}{4} + \frac{7a}{4}$~~

$t+1 = \frac{7}{4}(t+1) - \frac{7}{4}O_1$

$\frac{7}{4}O_1 = \frac{3}{4}(t+1)$

$O_1 = \frac{3}{7}(t+1)$

$b\left(t - \frac{2t}{5}\right) = a\left(t+1-\frac{3}{7}(t+1)\right)$

$b \cdot \frac{3t}{5} = a \cdot \frac{4}{7}(t+1)$

$(49-a)\frac{3t}{5} = a\frac{4}{7}(t+1)$

$\frac{49 \cdot 3t}{5} - \frac{3at}{5} = \frac{4at}{7} + \frac{4a}{7}$ | $\cdot 35$

$7^3 \cdot 3t - 21at = 20at + 20a$

$7^3 \cdot 3t = 41at + 20a$

$\frac{7^3 \cdot 3t}{41t+20} = a$

$\frac{7^3 \cdot 3 \cdot 2{,}5}{41 \cdot 2{,}5 + 20} =$

1029

$343 \times 3 = 1029$

47×21: 47, 94, 987

41×25: 205, 82, 102,5

122,5

47×22: 94, 94, 1034

$122{,}5 \times 21$: 1225, 2450, 26025

$122{,}5 \times 30 = 3675{,}0$

$122{,}5 \times 20 = 2450{,}0$

245×11: 245, 245, 2695

~~122,5~~

$122{,}5 \times 25$: 6125, 2450, 30625

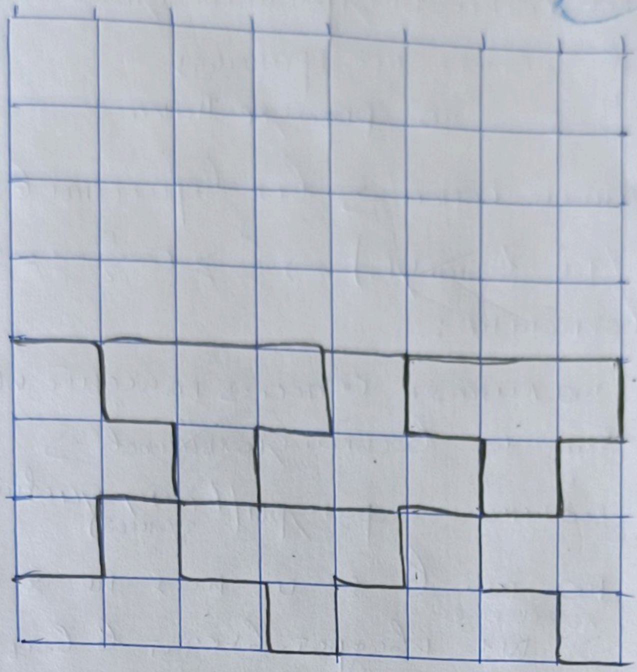
$49 \times 7 = 343$

343×75: 1715, 2401, 25725

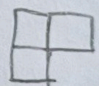
черновик

$b + \frac{5}{2} - 1 \geq 3$ $\quad \leq 10$

$b = 4$



$S = b + \frac{r}{2} - 1 \geq 3$ 16



$\frac{7^3 \cdot 3t}{7^2 t + 20}$ $\quad \frac{3^3 \cdot 3t + 3^3 \cdot 3a}{7^2 t + 7^2 a + 20}$

$\cancel{7^5 \cdot 3t^2 + 7^5 \cdot 3at + 7^3 \cdot 3 \cdot 20t}$ $\quad 7^5 \cdot 3t^2 + 7^5 \cdot 3at +$

$+ 20 \cdot 7^3 \cdot 3t + 20 \cdot 7^3 \cdot 3a$