0574096370007

57-40-96-37
(164.3)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кулагина Руслана Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«5» апреля 2026 года

Подпись участника

57-40-96-37
(164.2)

Черновик

$2^{2\sin x}+7^{2\sin x}+1=14^{\sin x}+2^{\sin x}+7^{\sin x}$

$4^{\sin x}+49^{\sin x}+1=14^{\sin x}+2^{\sin x}+7^{\sin x}$

$2^{\sin x}=a$

$7^{\sin x}=b$

$(a+1)(b+1)(c+1)=$

$=(ab+a+b+1)(c+1)=$

$=\underbrace{abc}_{23\sqrt3}+\underbrace{ac+bc+ab}_{23+10\sqrt3}+\underbrace{a+b+c}_{10+\sqrt3}+1$

$a^2+b^2+1=ab+a+b \mid :ab$

$ab+a+b-1$

$a^2-2ab+b^2+1+ab-a-b=0$

$(a-b)^2+(a-1)(b-1)=0$

$a, b\geq 0$

$a\leq 2$

$b\leq 7$

$x^3-(10+\sqrt3)x^2+(23+10\sqrt3)x+23\sqrt3$

$a^2-ab+b^2=a+b-1 \mid \cdot(a+b)$

$x>-\pi$

$x<100\pi$

$a^3-b^3=(a+b)^2-(a+b)$

$(a+b)^2=(a+b)(a^2-ab+b^2+1)$

$\cancel{(a+b-1)}(a+b+1)=$

$\cancel{=(a+b)^2}-1$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$

$\cancel{\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{a}+\frac{1-ab}{ab}=0}$

$(a+b+1)^2=a^2+b^2+1+2ab+2a+2b$

$a^2+b^2+1-ab-a-b$

$(a+b-1)^2=a^2+b^2+1+2ab-2a-2b$

$(a+b+1)^2=3(ab+a+b)$

$\cancel{(a+b-1)^2=}$

Чистовик

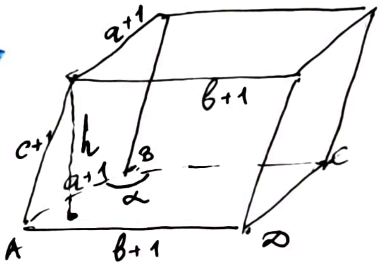
№2. $x^3+(23+10\sqrt{3})x=(10+\sqrt{3})x^2+23\sqrt{3}$

$x^3-(10+\sqrt{3})x^2+(23+10\sqrt{3})x-23\sqrt{3}=0$

По т. Виета для кубического уравнения имеем:

$$\begin{cases} a+b+c=10+\sqrt{3} \\ ab+bc+ca=23+10\sqrt{3} \\ abc=23\sqrt{3} \end{cases}$$

Заметим, что параллелепипед с фиксированными сторонами имеет наибольший объём тогда, когда он прямоугольный.



Пусть высота такого параллелепипеда h. $h\le(c+1)$ (h - перпенд., c - наклонная)

$S_{осн}=S_{ABCD}=\cancel{ab}\sin\alpha\le\cancel{ab}\ (a+1)(b+1)$

$V_h=hS_{осн}=\cancel{h ab\sin\alpha\le abc}=$

$=h\cdot(a+1)(b+1)\sin\alpha\le(a+1)(b+1)(c+1)$

~~Итак~~

Таким образом объём такого параллелепипеда не больше $(a+1)(b+1)(c+1)$. Также при малых h и $\sin\alpha$ объём может принимать сколь угодно малые полож. знач.

$$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1=$$

$$=23\sqrt{3}+23+10\sqrt{3}+10+\sqrt{3}+1=34(1+\sqrt{3})$$

Ответ. $(0;\ 34(1+\sqrt{3}))$.

№4. Заметим, что остаток по модулю 11 числа сравним с разностью цифр на чётных и на нечётных позициях. Например, $\overline{abcd}\equiv b+d-(a+c)\pmod{11}$

Рассмотрим всевозможные пары остатков, которые дают в произведении остаток 1 по модулю 11.

57-40-96-37
(164.3)

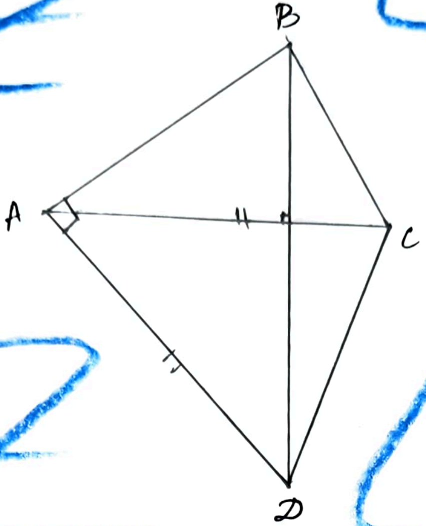
Черновик

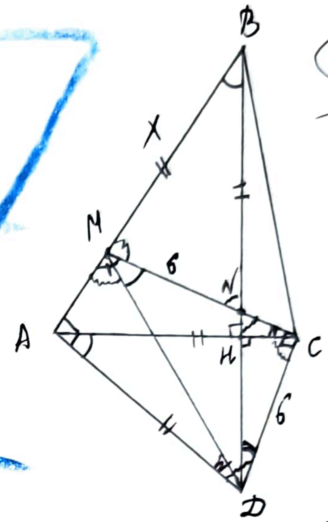
$9+a-10=a-1$

$b+9-1=b+8$

~~1, 2, 3, 4, 5~~

~~1) a=2 b=4~~
~~2) a=4 b=7~~
3) a=3 b=9
~~4) a=6 b=1~~
~~5) a=8 b=0~~
~~6) a=0 b=2~~





1) b=4 a=2
2) b=6 a=5
3) b=5 a=3
4) b=8 a=10
5) b=10 a=9
6) b=2 a=0

S_{ABCD} - ?

1) 1·1
2) 3·4
3) 2·6
4) 5·9
5) 7·8
6) 10·10

$\frac{X-CH}{DH}=\frac{X+NH}{X-CH}$ $\frac{NH}{HC}=\frac{NC}{6}$ $\frac{CH}{NH}=\frac{6}{NC}$

$\overline{793a}\cdot\overline{1b09}\underset{11}{\equiv}1$

$\cancel{\frac{AM}{MB}}$ $\frac{AM}{\cancel{X}}\cdot\frac{\cancel{X}}{NH}\cdot\frac{CH}{X}=1$

23 ·1

a, b - неч.

$\frac{6\cdot AM}{NC\cdot X}=1$

н ч
21

$\frac{X}{6}=\frac{AM}{NC}$

Sл - Sн = 1

~~$\frac{X}{AM}=\frac{CH}{NH}=\frac{6}{NC}$~~

$(7\cdot1000+9\cdot100+3\cdot10+a)(1000+100b+9)=$

$=7\cdot10^6+7b\cdot10^5+63\cdot10^3+9\cdot10^5+9b\cdot10^4+81\cdot10^2+$

$+3\cdot10^4+3b\cdot10^3$

Чистовик

Если ~~ав~~ $xy \equiv 1 \pmod{11}$, то сущ. несколько вариантов.

~~1. $x\cdot y \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow x \underset{11}{\equiv} 1,\ y \underset{11}{\equiv} 1$~~

~~2. $x\cdot y \equiv 12 \pmod{11} \Rightarrow x \underset{11}{\equiv} 3,\ y \underset{11}{\equiv} 4$ или наоборот / $x \underset{11}{\equiv} 2,\ y \underset{11}{\equiv} 6$ или наоборот~~

~~3. $x\cdot y \equiv 23 \pmod{11}$, $xy \equiv$~~

1. $x \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{11}$
2. $x \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow y \equiv 6 \pmod{11}$
3. $x \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow y \equiv 4 \pmod{11}$
4. $x \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow y \equiv 9 \pmod{11}$
5. $x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow y \equiv 8 \pmod{11}$
6. $x \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow y \equiv 10 \pmod{11}$

Также подходят варианты, получаемые перестановкой x и y.

$\overline{793a} \equiv (a+9-10) \pmod{11} \equiv (a-1) \pmod{11}$

$\overline{1b09} \equiv (9+b-1) \pmod{11} \equiv (b+8) \pmod{11}$

Рассмотрим полученные 10 случаев (учитывая, что a и b — цифры)

1. $a-1 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow a=2$, $(b+8) \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow b=4$
2. $a-1 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow a=3$, $b+8 \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow b=9$
3. $a-1 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow a=4$, $b+8 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow b=7$
4. $a-1 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow a=6$, $b+8 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow b=1$
5. $a-1 \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow a=8$, $b+8 \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow b=0$
6. $a-1 \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow a=0$, $b+8 \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow b=2$
7. $a-1 \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow a=7$, $b+8 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow b=\cancel{10}\ 5$ ~~(невозм.)~~
8. $a-1 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow a=5$, $b+8 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow b=6$
9. $a-1 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow a=10$, $b+8 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow b=8$ (невозм.)
10. $a-1 \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow a=9$, $b+8 \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow b=10$ (невозм.)

Т.к. $\overline{ab}$ или $\overline{ba}$ — простые, то одна из цифр должна быть нечётной. Остаются случаи 2, 3, 4, 7, 8. Выпишем всевозможные нечётные числа из них:

39, 93, 47, 61, 57, 75, 65; из них простыми явл. числа 47, 61.

Ответ. 47, 61.

2 из 6

57-40-96-37
(164.3)

Черновик

$p \geq 3$

$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{(3+3)}{36}+$

$+\frac{1}{12}\cdot\frac{(6+4)}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{(10+5)}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{15+6}{36}+$

$+\frac{1}{12}\cdot\frac{21+5}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{26+4}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{30+3}{36}+$

$+\frac{1}{12}\cdot\frac{35}{36}=$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

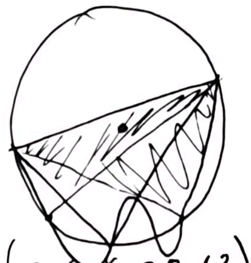
14 41 23 32

15 24 32

16

$=\frac{1}{12}\left(\overbrace{1+3+6+10}^{20}+\overbrace{15+21}^{36}+\overbrace{26+30}^{56}+\overbrace{33+35}^{68}\right)=$

$=$



$R<\frac{1}{2}$

$68+56+36=160$

144×12: 288, 144, 1728

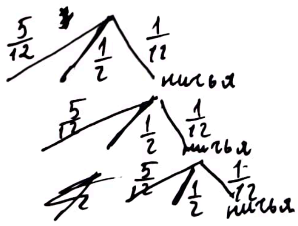
(c 2 x 90 12)

$\frac{180}{36\cdot12}=\frac{5}{12}$

$\cancel{\frac{1}{12}}$ $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\left(\underbrace{1+2+3+4}_{10}+5+6+5+\underbrace{4+3+2+1}_{10}\right)$

$\cancel{\frac{1}{12}}$

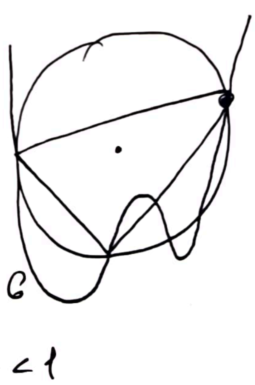
$\frac{5}{12}$



2

$144\times5=720$

$157\times6=942$



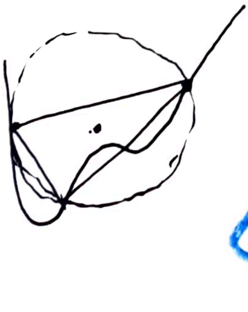
$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{144}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot12}+\frac{1}{2\cdot144}=$

$=\frac{157}{288}$

$dg(\overline{5}(x))=2026$

$AB, BC, CA<1$



Чистовик

№5. А) Чтобы Петя выиграл первым ходом, он должен набрать очков строго больше, чем Вася, ~~т.е. кол-во очк~~

~~Вер~~ Вероятность этого:

$$P_A=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(1+3+6+10+15+21+26+30+33+35\right)=\frac{180}{12\cdot 36}=\frac{5}{12}$$

(т.е. мы складываем в-ть, что Петя наберёт K очков, а Вася $2\le n<K$ очков для ~~к~~ натуральных $3\le K\le 12$).

Б) ~~Ве~~ Вероятность того, что ~~в~~ на первом ходу победитель не будет выявлен, равна:

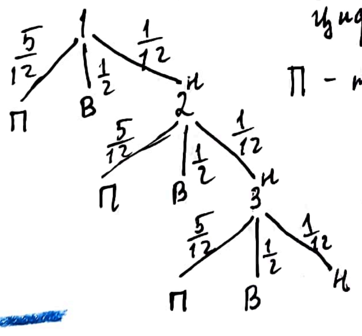
$$P_1=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1\right)=\frac{1}{12}$$

(т.е. мы складываем в-ти того, что Петя и Вася наберут по K очков для каждого натурального $2\le K\le 12$).

Чтобы победитель так и не выявился, такая ситуация должна повториться трижды, т.е.:

$$P_Б=(P_1)^3=\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{1728}$$

В) Построим дерево событий:



Цифрами обозначены номера ходов, П - победа Пети, В - победа Васи, Н - ничья

Если на каждом отдельном ходу в-ть выигрыша Пети равна $\frac{5}{12}$, а в-ть ничьи — $\frac{1}{12}$, то в-ть победы Васи равна

$$1-\frac{1}{12}-\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$$

Вероятность общей победы равна:

- у Пети: $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{5}{12}=\frac{144\cdot5+5\cdot12+5}{1728}=\frac{785}{1728}$
- у Васи: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{144+12+1}{288}=\frac{157}{288}=\frac{942}{1728}$

$\frac{942}{1728}>\frac{785}{1728}$ => Вася выиграет с большей в-тью

Ответ. А) $\frac{5}{12}$; Б) $\frac{1}{1728}$; В) у Васи — $\frac{942}{1728}$ (или $\frac{157}{288}$).

Черновик

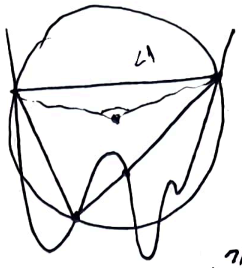
$2^{\sin x}=a$

$7^{\sin x}=b$

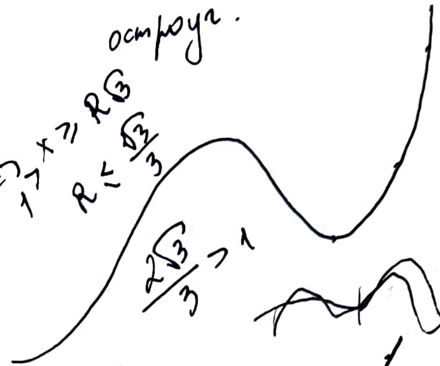
$\sin x=0$ подходит

$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$2^{\sin x}-7^{\sin x}$



остроуг.

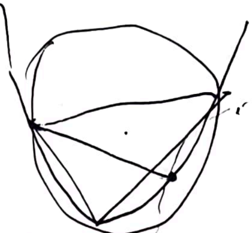


$\alpha \geq 120^\circ \Rightarrow x \geq R\sqrt{3}$

$1 \geq$

$R \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

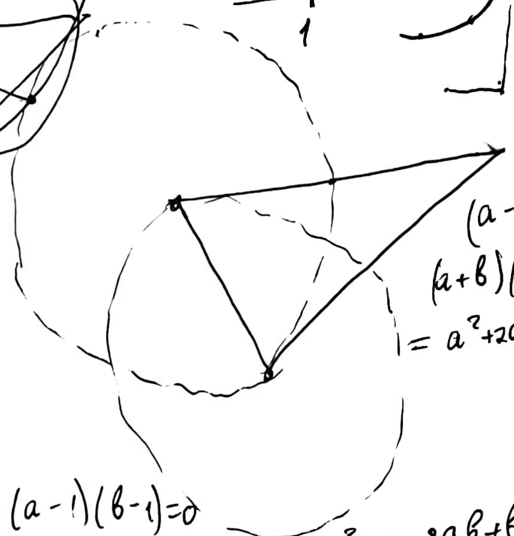
$\frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$

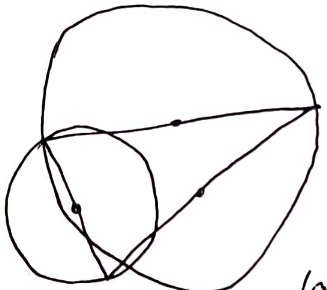


1

$a<1 \Rightarrow \sin x<0$

$b<1 \Rightarrow \sin x<0$





$(a-1)(b-1)\geq 0$

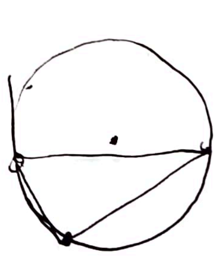
$(a+b)(a+b-1)=$

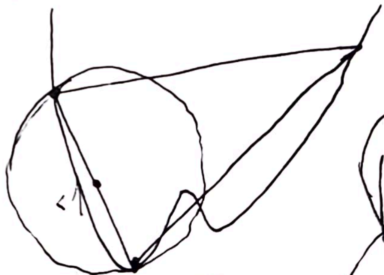
$=a^2+2ab+b^2-a-b$

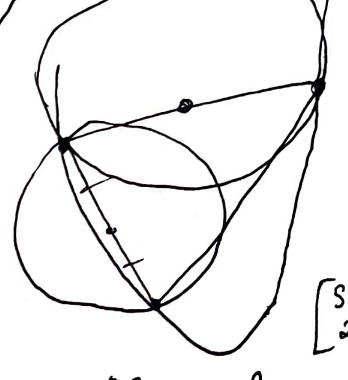
$(a-b)^2+(a-1)(b-1)=0$

$a^2-2ab+b^2+ab-a-b+1=$

$=(a-b)^2+(a-1)(1-1)$





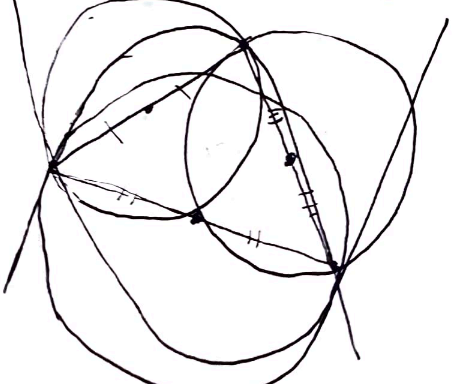


$a=b$

$a=1$

$b=1$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2^{\sin x}=7^{\sin x}\end{array}\right.$



$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$a^2+b^2-ab-a-b+1$

$(a+b-1)(a-b-1)=$

$=a^2$

Чистовик

№1. Пусть $2^{\sin x} = a$, $7^{\sin x} = b$, тогда:

$$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + ab - a - b + 1 = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-1)(b-1) = 0$$

Заметим, что если $a < 1$, то $\sin x < 0$, и если $b < 1$, то $\sin x < 0$ (и наоборот для $a > 1$ и $b > 1$).

Тогда при $a < 1$, $b < 1$ и при $a > 1$ $b > 1$, т.е. $(a-1)(b-1) \geq 0$ при всех x.

Сумма двух неотрицательных чисел равна 0, значит каждое из них равно 0.

$$\begin{cases} a = b \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = b = 1, \text{ т. е. } 2^{\sin x} = 7^{\sin x} = 1, \ \sin x = 0$$

Получим все решения вида $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

~~$-2\pi < -3,14 <$~~

$-\pi < -3,14 < 0$

$100\pi < 315 < 101\pi$ $\Big| \Rightarrow$ подходят все k от 0 до 100 ($k \in \mathbb{Z}$),

значит всего 101 решение на данном отрезке.

Ответ. 101

№3. Дано:

$ABCD$ – 4-угольник

$AC \perp BD$

$\angle A = 90°$

$AC = AD$

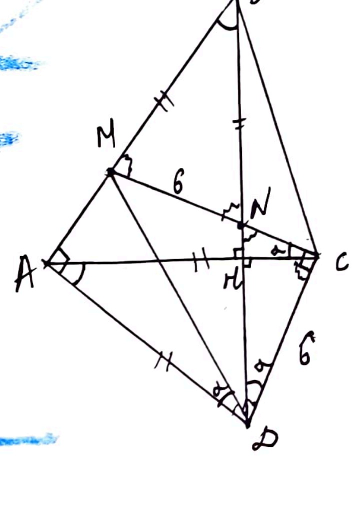
$M \in AB$, $MC \cap BD = N$

$BM = BN = AD$

$DC = 6$

S_{ABCD} – ?

Решение



Чистовик

№3. В прямоуг. $\triangle ABD$ $\angle ABD = \angle DAC$

$\triangle MBN = \triangle DAC$ (по 2-м сторонам и $\angle$ между ними) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = \angle BMN = \angle BNM$

$\angle BNM = \angle CND$ (верт.)

$\angle BNM = \angle DCA$

$\angle CHD$ - прямой

$\Rightarrow \triangle CNH \sim \triangle DCH$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \triangle DCN$ - прямоуг., $\angle DCN = 90^\circ$

Значит AMCD - вписанный

Пусть $\angle CDN = \alpha$, тогда $\angle CDN = \angle ACM = \angle ADM = \alpha$

$CH = 6\sin\alpha$ $\quad NH = NC\sin\alpha = 6\sin\alpha\, tg\alpha$

$CN = 6\, tg\alpha$

$\angle DAC = 180^\circ - 2\angle ACD = 2\alpha \Rightarrow AC = \frac{DC}{2\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}$

$AM = AD\, tg\alpha = AC\, tg\alpha = \frac{3}{\cos\alpha}$

$AC = AD = BM = BN = \frac{3}{\sin\alpha}$

Запишем т. Менелая для $\triangle ACM$ и секущей BD:

$$\frac{AH}{HC} \cdot \frac{CN}{MN} \cdot \frac{MB}{AB} = 1$$

$$\frac{\frac{3}{\sin\alpha} - 6\sin\alpha}{6\sin\alpha} \cdot \frac{6\, tg\alpha}{6} \cdot \frac{\frac{3}{\sin\alpha}}{\frac{3}{\sin\alpha} + \frac{3}{\cos\alpha}} = 1$$

$$\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha} \cdot tg\alpha \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 1$$

$$\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 1$$

$$1 - 2\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$$

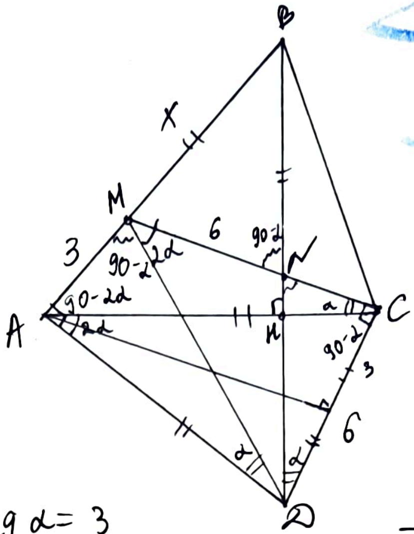
$$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$$

~~$(a+b)(3a-b)$~~

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)(3\sin\alpha - \cos\alpha) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \quad (\alpha < 90^\circ \Rightarrow \text{невозм.}) \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$$

Черновик



$x + \cancel{2\alpha} + \alpha + 90 - \cancel{3\alpha} = 180$

$x + \alpha =$

$\frac{AM}{\cancel{x}} \cdot \frac{x}{NH} \cdot \frac{CH}{x} = 1$

$AM = x\,tg\,\alpha = 3$

$\frac{AH}{CH} \cdot \frac{CN}{6} \cdot \frac{x}{AB} = 1$

$90 - \alpha = 2\alpha + x$

$\sin\alpha = \frac{3}{x}$

$\frac{x - CH}{CH} \cdot \frac{CN}{6} \cdot \frac{x}{x + AM} = 1$

$x = \frac{3}{\sin\alpha}$

$CH = CN\cos\alpha = 6\sin\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{CN}{6}$

$x = \quad 20 \quad 2\sqrt{10}$

$CN = 6\,tg\,\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{3}{x}$

~~NH = CN~~

$x = \frac{3\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3\,ctg\,\alpha$

$NH = C\cancel{N}\sin\alpha = 6\sin\alpha\,tg\,\alpha$

~~AM =~~ x $\quad \frac{AM}{x} = tg\,\alpha$

$AM = x\,tg\,\alpha = 3$

$AH = x - 6\sin\alpha = 3(ctg\,\alpha - 2\sin\alpha)$

$\frac{3}{x} \cdot \frac{x}{6\sin\alpha\,tg\,\alpha} \cdot \frac{6\sin\alpha\,tg\,\alpha}{3} = 1$

$\frac{3\,\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}\cdot 3} \cdot \frac{3}{\sin\alpha \cdot \cancel{6\sin\alpha\,tg\,\alpha}} \cdot \frac{\cancel{6\sin\alpha}\,\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} = 1$

$\frac{10}{9} = \frac{1}{}$

$\frac{3(ctg\,\alpha - 2\sin\alpha)}{6\sin\alpha} \cdot \frac{6\,tg\,\alpha}{6} \cdot \cancel{\frac{3\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

$\frac{4}{3} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos\alpha = \cancel{\ldots}$

$\frac{\cancel{3}(ctg\,\alpha - 2\sin\alpha)}{2\,\cancel{6}\sin\alpha} \cdot \frac{\cancel{6}\,tg\,\alpha}{\cancel{6\cos\alpha}} \cdot \frac{\cancel{6}\,ctg\,\alpha}{\cancel{3}(ctg\,\alpha + 1)\sin\alpha} = 1$

$5a^2$

$\frac{3}{\sqrt{10}}$

$3a^2 + 2ab - b^2 = 0$

$\frac{ctg\,\alpha - 2\sin\alpha}{2\sin\alpha(ctg\,\alpha + 1)} = 1$

~~3a = b~~

$(a + b)(3a - b)$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2\sin\alpha = 2\cos\alpha + 2\sin\alpha$

Чистовик

№3. $AC = 3\sqrt{10} = BN$

$DH = 6\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{10}}$

$NH = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \left(\frac{18}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} + 3\sqrt{10}\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{10} = 25 \cdot 3 = 75$

Ответ. 75