0 950356 550000

95-03-56-66
(163.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 Е - 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Енина Никиты Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«05» апреля 2026 года

Подпись участника

Чистовик

№1

$2^{\sin x} = a$; $7^{\sin x} = b$

$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} - b + 1 = 0$

$\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^2}{2} = 0$

$\begin{cases} a - b = 0 \\ a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \to a = b = 1$

$\begin{cases} 2^{\sin x} = 1 = 2^0 \\ 7^{\sin x} = 1 = 7^0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

Отрезок $[-3{,}14;\ 315]$: $-\pi > -3{,}14 > 0\pi$

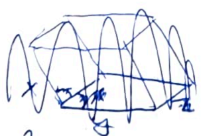
$\underset{314{,}15..}{\approx} 100\pi < 315 < 101\pi \approx 314{,}15.. + 3{,}14.. = 317,...$

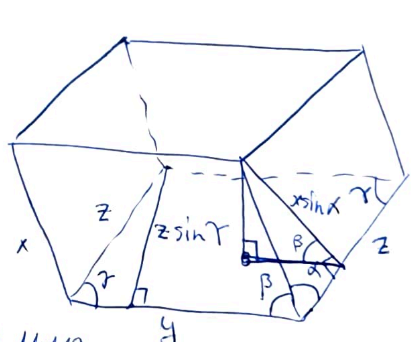
Таким образом, на отрезке $[-3{,}14;\ 315]$ корни уравнения – это $\{0\pi, \pi, 2\pi, \dots, 99\pi, 100\pi\}$ – всего их 101.

Ответ: 101

№2

Решим дополнительную задачу: „Стороны параллелепипеда – x, y, z. Какой может быть его объем?"





В зависимости от α, β, γ объем V может принимать разные значения.

(α, β, γ – острые углы в параллелограммах-гранях)

$V = S_{\text{основания}} \cdot H = \overbrace{y \cdot z \sin\gamma}^{S} \cdot \overbrace{x \sin\alpha \cdot \sin\beta}^{H} = xyz \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$

$\boxed{\text{Продолжение №2}}$ $\boxed{\text{Чистовик}}$ Максимум V, очевидно достигается при $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = 1$. Тогда $V = xyz$

Минимум же достигается при $\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \sin\beta = 0\\ \sin\gamma = 0\end{array}\right.$, тогда параллелепипед вырожденный и $V = 0$.

Т.к. $V(\alpha, \beta, \gamma)$ – непрерывная функция, при некоторых α, β, γ достигается любой $V \in [0; xyz]$.

Перейдем к исходной задаче.

$x^3 + (23 + 10\sqrt{3})x - (10 + \sqrt{3})x^2 - (23\sqrt{3}) = 0$

$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$

$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 10 + \sqrt{3} = a + b + c \\ 23 + 10\sqrt{3} = ab + bc + ac \\ abc = 23\sqrt{3} \end{cases}$

Заметим, что искомый объем $V_0 \in [0; \underbrace{(a+1)(b+1)(c+1)}_{V_{макс}}]$

$V_{макс} = abc + \underbrace{ab + ac + bc} + \underbrace{a + b + c} + 1 =$

$= 23\sqrt{3} + 23 + 10\sqrt{3} + 10 + \sqrt{3} + 1 =$

$= 34\sqrt{3} + 34$

Таким образом, объем V_0 параллелепипеда будет $\in [0; 34\sqrt{3} + 34]$

Ответ: $[0; 34\sqrt{3} + 34]$

95-03-56-66 (53)

№4 Чистовик

$\overline{793a}\cdot\overline{1b09}\equiv_{11}1$ $\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$, т.к. первая цифра числа $\neq 0$, а если вторая $=0$, то такое число $\vdots\, 2$, а значит не простое. Тогда $b-1\geq 0$, и $(b-1)$ — это цифра.

$$(7700+220+\overline{1a})\cdot(1100+\overline{(b-1)09})\equiv_{11}1$$

$$\overline{1a}\cdot\overline{(b-1)09}\equiv_{11}1\equiv_{11}(100(b-1)+9)(10+a)\equiv_{11}(b-1+9)(10+a)$$

$$(b+8)(10+a)\equiv_{11}1$$

Я не понял условия задачи, поэтому решу двумя способами. (1) — $\overline{ab}\in P$, $\overline{ba}$ — любое число. (2) — $\overline{ab}\in P$, $\overline{ba}\in P$ (P — множество простых)

Перебор

a	(1)	(2)
$a=0$:	$a\neq 0$ $\varnothing$	$a\neq 0$ $\varnothing$
$a=1$:	$(b+8)\cdot 0\equiv_{11}1$ $\varnothing$	$0\equiv_{11}1$ $\varnothing$
$a=2$:	$(b+8)1\equiv_{11}1$; $b\equiv_{11}-8\equiv_{11}3$, $b=3$; $\overline{ab}=23\in P$ Подходит	a — четное $\Rightarrow\overline{ba}\,\vdots\,2\Rightarrow\varnothing$
$a=3$:	$(b+8)\cdot 2\equiv 1\equiv 2b+16\equiv 2b+5 \pmod{11}$; $2b\equiv_{11}-4\equiv_{11}7\rightarrow$ нет решений, где b — цифра $\varnothing$	
$a=4$:	$(b+8)\cdot 3\equiv 1\equiv 3b+24\equiv 3b+2 \pmod{11}$; $3b\equiv_{11}-1\equiv_{11}10\rightarrow$ нет решений, где b — цифра $\varnothing$	
$a=5$:	$(b+8)\cdot 4\equiv 1\equiv 4b+32\equiv 4b-1 \pmod{11}$; $4b\equiv_{11}2\rightarrow$ ~~нет решений, где b — цифра~~ $b=6\rightarrow 56\notin P;\ 65\notin P\rightarrow\varnothing$	
$a=6$:	$(b-3)5\equiv 1\equiv 5b-15\equiv 5b-4 \pmod{11}$; $5b\equiv_{11}5\rightarrow b=1$; $\overline{ab}=61$ — простое Подходит	a — четное $\Rightarrow\overline{ba}\,\vdots\,2\rightarrow\varnothing$
$a=7$	$(b-3)6\equiv 1\equiv 6b-18\equiv 6b+4 \pmod{11}$; $\pmod{11}$ $6b\equiv -3\equiv 8\equiv 19\equiv 30\rightarrow b=5$; $57\notin P;\ 75\notin P$ $\varnothing$	

Чистовик

Продолжение №4

a	(1)	(2)
$a=8$	$(b-3)7 \equiv 1 \equiv 7b-21 \equiv 7b+1 \pmod{11}$ $7b \underset{11}{\equiv} 0 \to b \vdots 11 \to b$ - не цифра $\varnothing$	
$a=9$:	$(b-3)8 \equiv 1 \equiv 8b-24 \equiv 8b-2 \pmod{11}$ $8b \underset{11}{\equiv} 3 \equiv 14 \equiv 25 \equiv 36 \equiv 47 \equiv 58 \equiv 69 \equiv 80$ b - не цифра $\to \varnothing$	

В случае (1) - ответ: 23, 61

В случае (2) - ответ: таких значений нету

№6

А) ~~Шансы~~ васи: Исходы выпадения

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица шансов выпадения

Очки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Петя	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
Вася	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Вероятность, что Петя выиграет после первого хода = вероятности, что Петя выиграет в любом из ходов =

$$=P_{\text{П.В.}}=\frac{1}{36}\cdot\frac{10}{12}+\frac{1}{18}\cdot\frac{9}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{8}{12}+\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{12}+\frac{5}{36}\cdot\frac{6}{12}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{12}+\frac{5}{36}\cdot\frac{4}{12}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{12}+$$

$$+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{12}+\cancel{\frac{1}{36}\cdot\frac{0}{12}}=\frac{1}{36\cdot12}(10+2\cdot9+3\cdot8+4\cdot7+5\cdot6+6\cdot5+5\cdot4+4\cdot3+$$

$$+3\cdot2+2\cdot1+1\cdot0)=\frac{1}{36\cdot12}(10+18+24+28+30+30+20+12+6+2)=\frac{1}{36\cdot12}\cdot($$

$$(28+52+80+20)=\frac{1}{36\cdot12}\cdot(180)=\frac{18\cdot2\cdot5}{36\cdot12}=\boxed{\frac{5}{12}}$$

Б) Вероятность, что победителя не будет = (Вероятности ничьи$)^3$ $=(P_н)^3$

$$P_н=\frac{1}{12}\cdot0+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}+$$

$$+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{12}\cdot1=$$

$$=\frac{1}{12}$$

Продолжение №6. Чистовик

$(P_H)^3 = \frac{1}{12^3} = \boxed{\frac{1}{1728}}$ = Вероятность, что победитель не будет определён

В) $1 = P_{П.В} + P_H + P_{В.В.}$ ($P_{П.В}$ – P(Петя выиграет в ходе); P_H – P(ничья в ходе); $P_{В.В}$ – P(Вася выиграет в ходе))

Вероятность выигрыша Пети во всей игре =

$= P_П = P_{П.В.} + P_{П.В} \cdot P_H + P_{П.В.} \cdot P_H \cdot P_H = P_{П.В}(1 + P_H + P_H^2) =$

$= \frac{5}{12}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2}\right) = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{144+12+1}{144}\right) = \frac{157 \cdot 5}{1728} = \frac{7\cancel{58}85}{1728}$

Вероятность выигрыша Васи во всей игре =

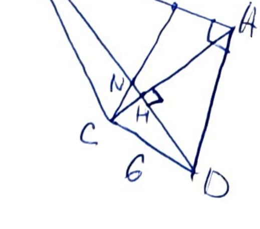
$= P_В = P_{В.В}(1 + P_H + P_H^2) = (1 - P_{П.В} - P_H)(1 + P_H + P_H^2) =$

$= \left(1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{12}\right)\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2}\right) = \frac{6}{12} \cdot \frac{144+12+1}{144} =$

$= \frac{6 \cdot 157}{1728} = \frac{942}{1728}$

Таким образом, у Васи вероятность больше – $\frac{942}{1728}$

№3



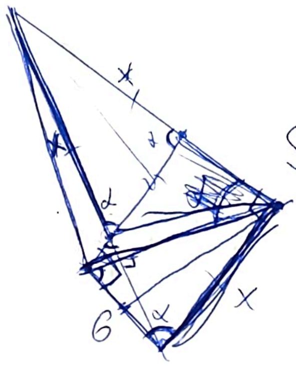
Т.к. $\angle HBA = \angle HAD$; $BM = AD$; $BN = AC$, то $\triangle BMN = \triangle ADC$.

Т.к. $\angle CDA = \angle NMB$, $\square AMCD$ – вписанный, поэтому $\angle MCD = 180° - 90° = 90°$

Если описать окружность (BAH), то AD будет её касаться (т.к. $\angle DBA = \angle HAD$), а если описать окружность (CNH), то CD будет её касаться (т.к. $\angle CND = \angle HCD$)

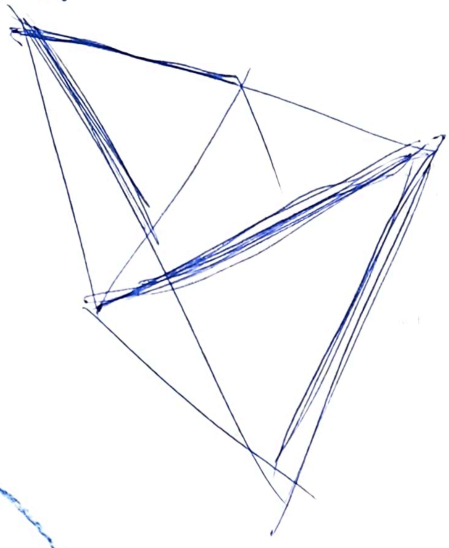
$S_{ABCD} = d_1 d_2 \cdot \sin 90 = d_1 d_2$ ($d_1 = AC$, $d_2 = BD$)

Черновик



$x \cos\alpha = 3$

$S = d_1 d_2 = x.$



Черновик

$2^{\sin x}$

$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$\frac{a^2}{2}+ab+\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}-a+\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}+b+\frac{1}{2}=0$

$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(b-1)^2}{2}=0$

$a=b=1$

$$\begin{array}{r} 157 \\ \times\ 5 \\ \hline 35 \\ 25 \\ 50 \\ \hline 785 \end{array}$$

942

785

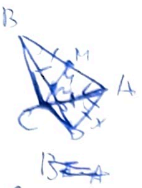
1728

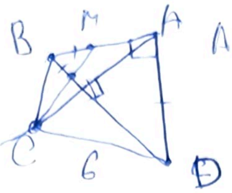
$$\begin{array}{r} 157 \\ \times\ 11 \\ \hline 157 \\ 157 \\ \hline 1727 \end{array}$$

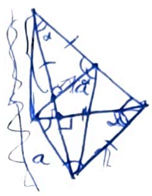
$AC=AD$

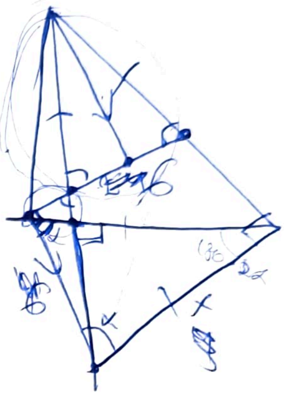
$\sqrt{61}$ 1727,9

42
49
56
63









$(x+MA)x\cdot\frac{1}{2}=$

$$\begin{array}{r} 157 \\ \times\ 6 \\ \hline 42 \\ 30 \\ 60 \\ \hline 942 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 1440 \\ 288 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 12 \\ 1 \\ \hline 157 \end{array}$$

$793a\cdot\overline{1609}\equiv 1$

$23a\cdot\overline{1609}\equiv 1$

$7a\cdot\overline{1609}\equiv 1$

$x=$

$180-2\alpha+x=90$

$x=-90+2\alpha$

$x=2\alpha-90$

$\overline{1609}$ $(b-1)$

$\overline{(b-1)2090}+a\cdot\overline{(b-1)09}\equiv 1$

$\overline{(b-1)002}+100a(b-1)+(-2a)\equiv 1$

$100a(b-1)+(-2a)$

$10\cdot(b-1)+2+a(b-1)-2a\equiv 1$

$(10+a)(b-1)-2a\equiv -1$

$d_1=\frac{x}{\cos(2\alpha-90)}$

$\frac{6}{\sin(180-2\alpha)}=\frac{d_2}{\sin\alpha}$

$\sin 2\alpha$

$$\begin{array}{r} 157 \\ \times\ 5 \\ \hline 35 \\ 25 \\ \hline 785 \end{array}$$

$1728-1=12^3-1^3=x=\frac{6\cdot\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{3}{\cos\alpha}$

$=11\cdot(144+12+1)$

$d_1=\frac{\frac{3}{\cos\alpha}}{\cos(2\alpha-90)}=\frac{3}{\cos\alpha(\cos 2\alpha\cdot 0+\sin 2\alpha)}=$

$=\frac{3}{2\sin\alpha\cos^2\alpha}$

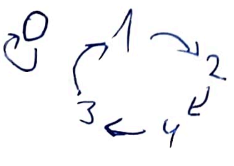
0	0	0
1	2	4
2	4	3
3	1	2
4	3	

$$\begin{array}{r} 144 \\ 12 \\ 1 \\ \hline 157 \end{array}$$

$a\to -3b\equiv 2b$

$b\to 7a\equiv 2a$

$a+b\to 2(a+b)$



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!