0 740226 830004

74-02-26-83
(164.6)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Козлова Максима Викторовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

74-02-26-83 (164.6)

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x} + \left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x} + 1 = \left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}$ - чётная $\qquad \sin x \in [-1;1] \Rightarrow 2\sin x \in [-2;2]$

$g(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}$ = чётна

$f(x)$ - всегда положительна

$g(x)$ - всегда положительна

сумма двух функ-ий полож > 0

$t(x) = \left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$ - полож ф-ция

ведь явл суммой полож. функ-ий

$\Rightarrow$ что обе части уравнения > 0

левая часть ≥ 1

черновик 1

2. $V=(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1) = abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c)+1$

по т. Виета для многочлена

1) $a+b+c = 6+\cancel{\sqrt{10}}\sqrt{5}$

2) $ab+ac+bc = 7+6\sqrt{5}$

3) $abc = 7\sqrt{5}$

$V = 6\sqrt{5}+7\sqrt{5}+(7+6\sqrt{5})+1 = 14+14\sqrt{5}$

4. по условию число $\overline{ab}$ - простое

$\overline{1a09}\cdot\overline{683b} = 1 \pmod{11}$

~~$\overline{abab}\cdot\overline{bbbb} = 1 \pmod{11}$~~ $\overline{1a09}$

~~произв~~ числа при делении на 11 сравнимы с суммой своих чисел

~~$\overline{1a09}\cdot\overline{683b} = 2a+2b$~~

тогда: $2\cdot(a+b)\cdot b = 1 \pmod{11}$

$b\cdot(a+b) = 2 \pmod{11}$

т.к. выраж-ие в левой части не делится на 11, то b не сравнимо с $0 \pmod{11}$ значит

переберём от. варианты: $a+b=2 \pmod{11}$

$b = 1 \pmod{11}$, $a+b = 1 \pmod{11}$ в таком

или $b=2 \pmod{11}$,

случае $a = 1 \pmod{11}$

итак цифры a и b должны давать одинаковый

ост при делении на 11 этот остаток $\neq 0$

теперь используем простоту числа $\overline{ab}$ - простое

двузначное число не может иметь цифры на 5

не т.к. цифра b не может быть, тогда a

черновик 2

74-02-26-83 (164.6)

4. ~~ис~~ по условию $\overline{ab}$ - прост число ; $\overline{ba}$ - прост

$\overline{1a09} \cdot \overline{683b} = 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow \overline{1a09} \cdot 1 \neq 0 \pmod{11}$

$\overline{683b} \cdot 1 \neq 0$

черновик 3

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x} + \left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x} + 1 = \left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = a$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = b$ тогда

$a^2 + b^2 + 1 = a \cdot b + a + b$

$2 \cdot (a^2 + b^2 + 1) = 2 \cdot (ab + a + b)$

$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 = 0$

т.к $(a-1)^2 \geq 0$, левая част ≥ 0, то рав-во возможно

~~a~~ $a = b = 1$ отсюда $\sin x = 0$ ~~$-315 < x < 3,14$~~

при этом ~~$0 < 3,14$~~ и

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ -315 < x < 3,14 \end{cases}$ отсюда следует $\begin{cases} x = \pi k ; k \in n \\ -315 < \pi k < 3,14 \end{cases}$

~~$\sin x \in k$~~ $\begin{cases} x = \pi k ; k \in n \\ -100 \leq k \leq 0 \end{cases}$

~~$\begin{cases} x \in \\ -100 < k < 0 \end{cases} \Rightarrow k \in (-10$~~

~~замена $\sin x = k$~~

Ответ: $k \in [-100; 0]$

100 реш-ний.

~~$\begin{cases} x = \pi k ; k \in n \\ 100 < k < 0 \end{cases}$~~

2). $V=(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=(abc)+(ab+ac+b)+(a+b+c)+1$

по Т. Виета для многочлена

1) $a+b+c=6+\sqrt{5}$

2) $abc=7\sqrt{5}$

3) $ab+bc+ac=7+6\sqrt{5}$

из чего $V=6+\sqrt{5}+7\sqrt{5}+7+6\sqrt{5}+1=14+14\sqrt{5}$

Ответ: $V=14+14\sqrt{5}$

4) по условию $\overline{ab}$ - прост двузн. число

$\overline{1a09}\cdot\overline{683b}=1\ (mod\ 11)$

рассмотрим числа по $+(mod\ 11)$

$\overline{1a09}=a+1\ (mod\ 11)$ $\overline{683b}=2(b+1)\ (mod\ 11)$

$(a+1)\cdot 2(b+1)=1\ (mod\ 11)$

т.к. $1\cdot 1=1$ а $2\cdot 1=1\ (mod\ 11)$ получим

2 случая а) $a=0\ (mod\ 11)$ $b=1\ (mod\ 11)$

в) $a=1\ (mod\ 11)$ $b=0\ (mod\ 11)$

то перебирая двузнач $\overline{ab}$ - прост число 31, 37, 61, 67, 97, 13, 19, 43, 73,

7)

6)

чистовик 1

74-02-26-83 (164.5)

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}+1=\left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$

замена $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}=a$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}=b$

$a^2+b^2+1=ab+a+b \quad |\cdot 2$

$2a^2+2b^2+2=2ab+2a+2b$

$(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(a^2-2ab+b^2)=0$

$(a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2=0$

возможно если $a=b=1 \Rightarrow \sin x=0$

$x=\pi k;\ k\in n$

из условия $x\in[-315;3{,}14]$, то $\pi k\in[-315;3{,}14]$

значит $k\in[-100;0]$

Ответ: $k\in[-100;0]$.

3) Реш-ие пусть $BD=t$ $\angle BAC=\alpha$ $\angle BDO=\alpha$

тогда Δ-ки AMN и Δ-к DBC равны по двум сторонам и углу

$AO=\frac{4t\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, $NO=AO-AM=t\cdot\left(\frac{\cos^2\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$KN=t-\cos\alpha$, $MK=t\sin\alpha$

$BO=BD-DO=t-t\cos\alpha$ при этом Δ-ки

MKN и PNO подобны $\Rightarrow \frac{MK}{PO}=\frac{MK}{NO}$

отсюда $\frac{t\sin\alpha}{t(1-\cos\alpha)}=\frac{t\sin\alpha PO}{t\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{t\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{t(\cos\alpha-\sin\alpha)}$

$\Rightarrow 5\cos^2\alpha-4\cos\alpha=0$ отсюда $\cos\alpha=0{,}5$

тогда $AO\ 16t$, $OC=\frac{t}{5}$ отсюда $AC=$

отсюда $S=\frac{1}{2}t_1t_2\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot PD=\frac{5t^2}{6}$

при этом по т Пифагора

$6^2=\frac{t^2}{25}+\frac{9t^2}{25}\Rightarrow t^2=\frac{5\cdot 6^2}{2}$ отсюда $S=\frac{25\cdot 6^2}{12}$

$\frac{25\cdot 36}{12}=\boxed{75}$

Ответ: 75

чистовик 2

5) У макара $\{1, \dots, 12\}$ возможные числа

~~У дахара 12 вероятностей $\{1, \dots, 12\}$~~

У захара возможны суммы

	1	2	3	4	5	6
1	2	2	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1) при этом

1 способ 3 против $1+1$

2 способ 4 против $1+2$; $2+1$, $1+1$

3 способ 5 против $1+1$; $1+2$; $2+1$; $1+3$; $3+2$

ч.т.д. 4 6 $4+1$, $1+4$

$(1;1)$; 2

$5 = 1+4$; $2+3$; ... ; $5+1$ – 5 способов

$6 = \cancel{1+5}$; $\cancel{5+1}$ $1+5$; ... 6 способов

$7 = 1+6$; ... ; $6+1$ 6 способов

$8 = 1+7$; ... ; $7+1$ 5 способов

сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

12

9 = 1

палучі таблицу

p											
очки											

А для каждого числа макара победа при $M = 3$; $p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$ при $3 = 2$

$M = 1, 2$ $p = 0$ при

2 способ ($M = 4$ $p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{18}$ при $3 = 2 | 3$ $\frac{1}{12}$ на)

и т. д. E мы будем умножать на последний шаг сумму первых чисел таблицы, последний шаг

$M = 12$ $p = \frac{1}{12}$ $\left(\overbrace{1+2+3+4+5+6+5+\dots+2} \right)$

до

Ответ: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{36}{1}$

$\frac{5}{12}$

б) если побед нет то каждый ход одинаковый

1) вер-сть $\frac{1}{}$

$M=1$ $З=1$ $p=0$ ведь $З>1$

$M=2$ $З=2$ $p=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}$

$M=3$ $З=3$ $p=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{18}$ ...

⋮ $M=7$ $З=7$ $p=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}$ ...

$M=12$ $З=12$ $p=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}$

отсюда р за - это сумма вариантов

$$\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1+2+\dots+6\dots+1}{36}\right)=\frac{1}{12}$$

так должно быт 3 раза то $\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{1728}$

$$144\times12=288+1440=1728$$

Ответ: 1728

в) из прошлых р (победы за ход и ничьи)

~~$(1-p)-p($~~

~~$\left(1-\frac{5}{12}\right)$~~ р ничьи в раунде $=\frac{1}{12}$

шанс победы М $-\frac{5}{12}$

шанс победы З $=1-p_Н-p_М=1-\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

=> шанс победы З = ничья · победа З

1) $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$ — 2 раза ничья победа З

2) $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$ - ничья и победа З

3) $\frac{1}{2}$ - победа З в 1 раунде

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{288}=\frac{144+12+1}{288}=\frac{157}{288}$$ - шанс П З.

Ответ: у З больше шанс $=\frac{157}{288}$.