0 665151 770006

66-51-51-77
(164.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Опарина Евгения Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

66-51-51-77 (164.7)

Лист 1

№1

$$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$$

Пусть $3^{\sin x} = a$ $\quad 5^{\sin x} = b$

тогда

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$$

$$a^2 - a(b+1) + b^2 - b + 1 = 0$$

Решим квадратное уравнение относительно a

$$D = b^2 + 2b + 1 - 4b^2 + 4b - 4 = -3(b-1)^2$$

$\Downarrow$

имеет решение только если $b = 1$ (иначе $D < 0$)

$b = 1 \Rightarrow 5^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$

$k \in \mathbb{Z}$

Проверим $\sin x = 0$

$3^0 + 5^0 + 1 = 15^0 + 3^0 + 5^0$ ✓ Работает

Значит из промежутка $[-3{,}15;\ 314]$ подходят корни вида πk где $k \in \mathbb{Z}$ и $k \in [-1;\ 99]$

а это 101 корень

Ответ: 101

№2 Лист 2

$$x^3 + (22+10\sqrt{2})x = (10+\sqrt{2})x^2 + 22\sqrt{2}$$

$$x^3 - (10+\sqrt{2})x^2 + (22+10\sqrt{2})x - 22\sqrt{2} = 0$$

$$V = (a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$$

Из теоремы Виета $abc = -(-22\sqrt{2})$

$ab + ac + bc = 22 + 10\sqrt{2}$

$a + b + c = -(-(10+\sqrt{2}))$

Значит $V = 22\sqrt{2} + 22 + 10\sqrt{2} + 10 + \sqrt{2} + 1 =$

$= \cancel{33}\ 33(1+\sqrt{2})$

Ответ: $33(1+\sqrt{2})$

№4

По признаку делимости на 11 и остатка при делении на 11

$\overline{4a89} \underset{11}{\equiv} -4 + a - 8 + 9 \underset{11}{\equiv} a - 3$

$\overline{290b} \underset{11}{\equiv} -2 + 9 - 0 + b \underset{11}{\equiv} b + 7$

Нам дано, что $(a-3)(b+7) \underset{11}{\equiv} 1$

Найдем все a и b удовлетворяющих условию

66-51-51-77 (164.7)

~~1~~ Пары чисел x и y такие что Лист 3

$xy \equiv_{11} 1$ (1; 1) (2; 6) (3; 4) (5; 9) (7; 8)
① ② ③ ④ ⑤

~~1~~

① $a = 4$ $b = 5$

② $a = 5$ $b = 10$ или $a = 9$ $b = 6$

③ $a = 6$ $b = 8$ или $a = 7$ $b = 7$

④ $a = 8$ $b = 2$ или $a = 1$ $b = 9$

⑤ $a = 10$ $b = 1$ или $a = 0$ $b = 0$

В данном примере мы можем прибавлять или отнимать 11 из a и b сколько угодно раз и остаток не поменяется но так как a и b цифры они не могут равняться $10 + 11k$ $k \in Z$ значит сраз не подходят пары $a = 10$ $b = 1$ и $a = 5$ $b = 10$

Посмотрим на остальные и скажем сколько среди них может быть $\overline{ab}$ или $\overline{ba}$ простых

① 45 ✗ 54 ✗ | ② 96 ✗ 69 ✗ | ③ 68 ✗ 86 ✗ 77 ✗ | ④ 82 ✗ 28 ✗ 19 ✓ 91 ✗

⑤ 00 ✗

Ответ: 19

№5 Лист 4

А) Пусть $A(n)$ - вероятность выпадения n очков у Ани

$T(n)$ - вер выпадения n очков у Тани

Вероятность того что Аня выиграет первым ходом это

$T(11)\cdot\frac{1}{12} + T(10)\cdot\frac{2}{12} + T(9)\cdot\frac{3}{12} + T(8)\cdot\frac{4}{12} + T(7)\cdot\frac{5}{12} + T(6)\cdot\frac{6}{12} + T(5)\cdot\frac{7}{12} + T(4)\cdot\frac{8}{12} + T(3)\cdot\frac{9}{12} + T(2)\cdot\frac{10}{12} =$

$= \frac{2+6+12+20+30+30+28+24+18+10}{36\cdot 12} =$

$= \frac{20+20+60+70+60+10}{36\cdot 12} = \frac{180}{36\cdot 12} = \frac{20}{4\cdot 12} = \frac{5}{12}$

Ответ: $\frac{5}{12}$

Б) Вероятность ничьи в одном из раундов это

$\left(T(11)+T(10)+T(9)+\ldots+T(3)+T(2)\right)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

(Таня выбивает какое то число очков и Аня должна выбить столько же)

Шанс того что это произойдёт 3 раза это $\left(\frac{1}{12}\right)^3$

Ответ: $\left(\frac{1}{12}\right)^3$

В) Рассмотрим шанс выиграть ~~в~~ в одном одной из девочек

Аня: $\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$

~~Таня~~: Шанс выиграть Тане в раунде это 1 минус шанс выиграть Ани и минус шанс ничьи т.е. $1-\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}$

Таня: $\frac{6}{12}+\frac{6}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{6}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$

Видно что шанс выиграть у Тани больше

Таня: $\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{288}=\frac{157}{288}$

P.S. шанс выиграть это сумма вероятностей выиграть в 1 раунде + вер выиграть во втором раунде + вер. выиграть в 3-ем раунде

Ответ: $\frac{157}{288}$

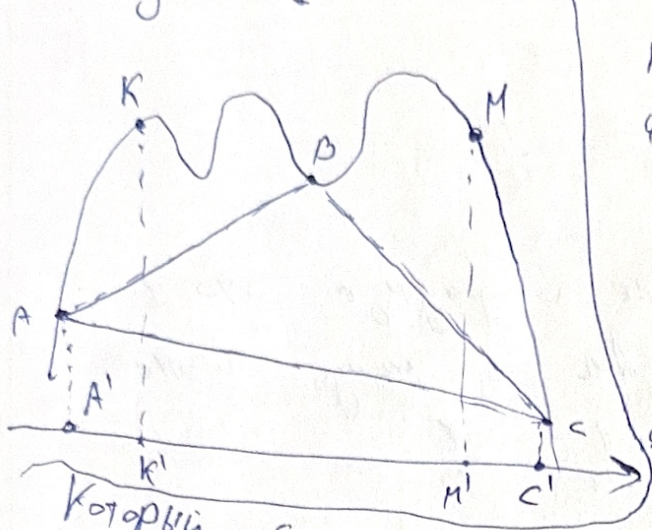
№6

Рассмотрим вершины треугольника с самой большой и с самой маленькой координатой по x и разберём несколько случаев

Лист 5

Лист 6

Случай 1



Самая левая вершина (A) находится на возрастающей части графика, а самая правая ~~точка~~ вершины (C) на убывающей или наоборот

Покажем что есть отрезок не больше AC который содержит точку P

Так как это график многочлена ~~что расстояние~~ ~~межд~~, то расстояние между проекциями любых точек K и M из ~~отрезка AC~~ кривой AC меньше чем $A'C'$ т.е. как на рисунке видно $K'M' \leq A'C'$

Покажем как в этом случаи провести искомый отрезок. Из точки P надо провести прямую параллельную AC, тогда это прямая пересечёт график (впервые) в двух точках справа и слева в точках S и L

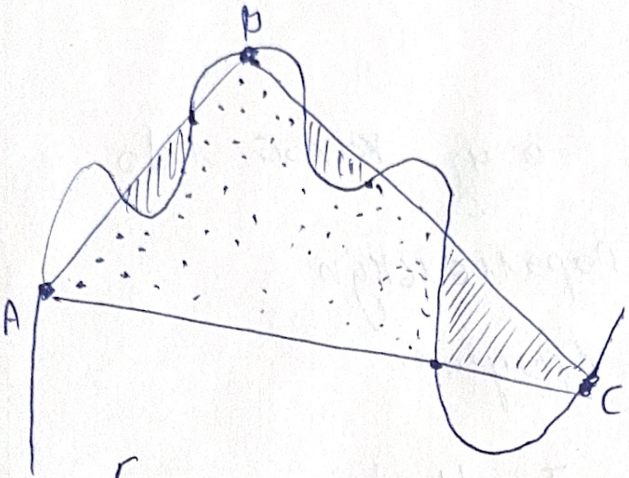
$SL \leq AC$ т.к. угол наклона один и тот же и $S'L' \leq A'C'$ - проэкция на Ox.

Однако это будет работать не всегда.

Это будет работать если прямая пересечёт график ~~на~~ на кривой AC. ~~Это~~ и

Лист 7

Разделим весь наш треугольник на области

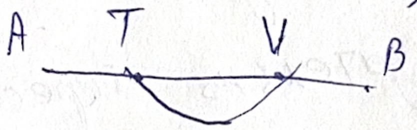


будем делить на области по точкам пересечения ΔABC и графика

Будем обходить треугольник от A к B от B к C и от C к A

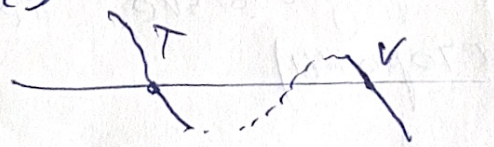
Покажем, что соседние точки находятся на разных промежутках (убывания/возростания)

Есть отрезок



и соседние точки пересечения с графиком

Если предположить что они одинаково возростают/убывают, то график будет прерываться ~~значит это нетак~~

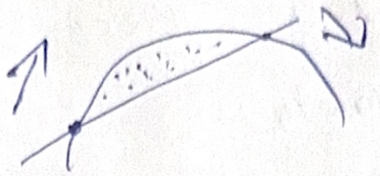


Но многочлены так не могут

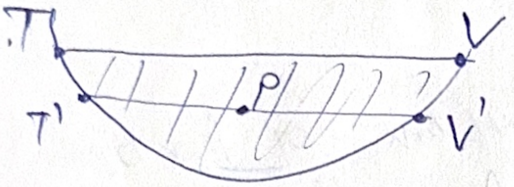
Лист 8

Теперь разбив весь Δ на части

и



мы можем провети а из какой либо области прямую параллельную отрезку отсекающий график



$TV \parallel T'V'$

и так как эта часть Δ полностью находится между графиком она ~~в~~ обязательно пересечёт его в точках T', V' так что $T'V' \leq TV$ а $TV \leq$ большей стороне треугольника (любой отрезок в треугольнике не больше его большей стороны)

Значит рассмотрев одну из областей с точкой P мы сможем провести отрезок Ч.Т.Д

Черновик

$CA \cdot BD = AN \cdot AC$

$CP \cdot CN = 12^2$

$CD^2 = KP \cdot (CN + CD) = 144 + CP \cdot CD$

$CD = \frac{144}{1-}$

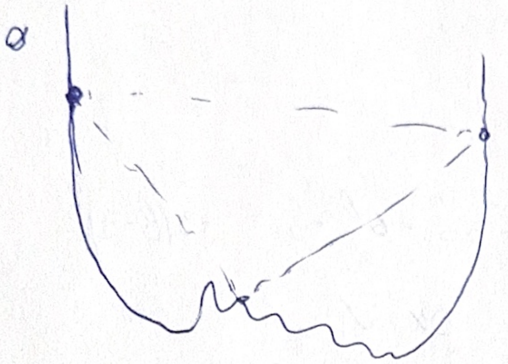
$\frac{12}{CN} = \frac{MK}{12}$ $MK \cdot CN = 144$

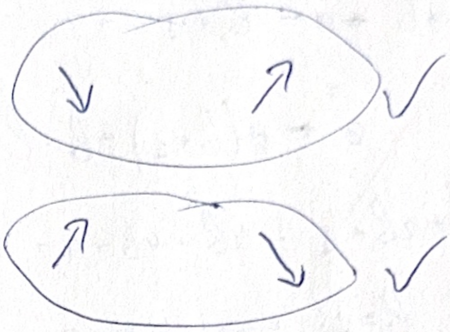
$\frac{CA}{AM} = \frac{KP}{KM} \Rightarrow CD^2 = CA \cdot KM$

Черновик

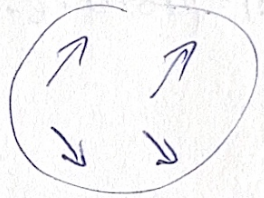
$(-4+9-8+9)(-2+9-0+b) \underset{11}{\equiv} 1$

$(a-3)(b+7) \underset{13}{\equiv} 1$

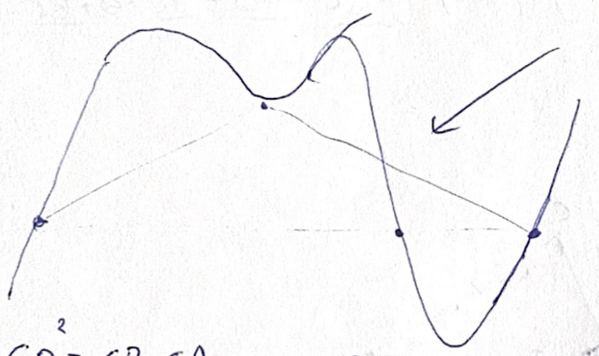




Вроде можно

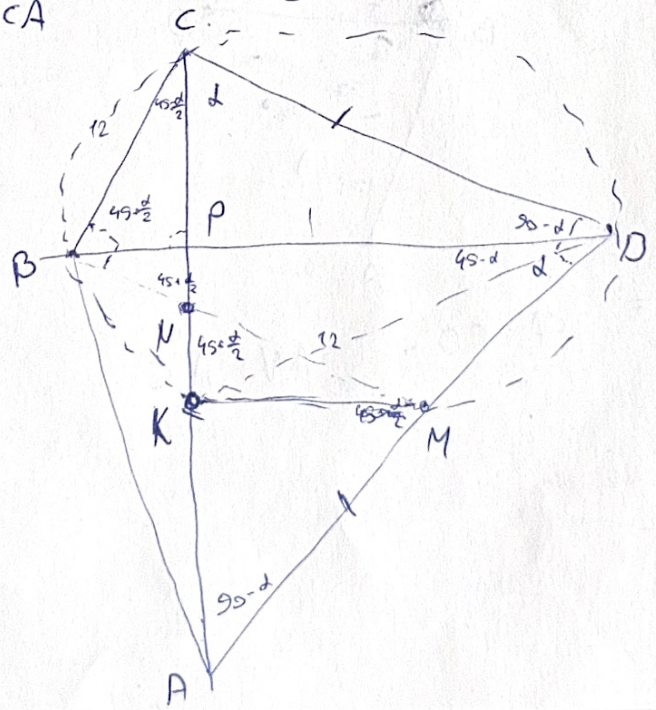


- будет пересекать



Δ как минимум в 2 точках

$CD^2 = CP \cdot CA$



№1

черновик

$3^{2t} + 5^{2t} + 1 = 3^t \cdot 5^t + 3^t + 5^t$

$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$

$a = b$ $\quad a^2 - a(b+1) + b^2 - b + 1 = 0$

$D = b^2 + 2b + 1 - 4b^2 + 4b - 4 = -3b^2 + 6b - 3 = -3(b-1)^2$

$b = 1 \Rightarrow \sin x = 0$ ok ✓

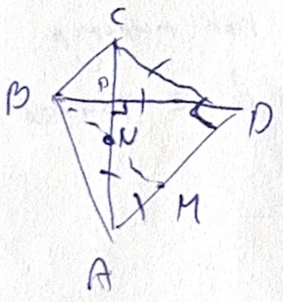
№2

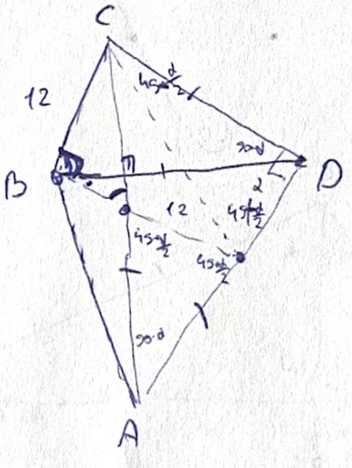
$x^3 + (22 + 10\sqrt{2})x = (10 + \sqrt{2})x^2 + 22\sqrt{2}$

$(a+1)(b+1)(c+1) = (ab + a + b + 1)(c+1) = abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1$

Виет

№3





Ср $CA \cdot BD =$

$CA \cdot CD = AN \cdot AC$