0 528640 160002

52-86-40-16
(182.3)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант (7 - 8)

Место проведения Казань
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бадыгшевой Алии Ильшатовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«5» апреля 2026 года

Подпись участника

80 (восемьдесят)

52-86-40-16
(182.3)

Задача 1

Чистовик 1

Пусть $V_п$ – скорость пешехода (км/ч)
$V_в$ – скорость велосипедиста (км/ч)
Тогда ~~далее~~ к моменту встречи пешеход прошёл
$V_п \cdot 1\frac{1}{4}(ч) = \frac{5V_п}{4}$ (км)

время от 9:15 до 10:30 – 1ч 15мин $= 1\frac{1}{4}$ ч

Велосипедист проехал до момента встречи
$V_в \cdot \frac{1}{4}(ч) = \frac{V_в}{4}$ (км)

время от 10:15 до 10:30 – 15 мин $= \frac{1}{4}$ ч

Ясно, что $\frac{5V_п}{4} = \frac{V_в}{4} \Rightarrow 5V_п = V_в$

Найдём необходимое в задаче время.
Пусть велосипедист ~~выехал~~ догнал пешехода в 10:00 и ехал при этом x ч.
Тогда пешеход прошёл до момента встречи
$V_п \cdot \frac{3}{4}(ч) = \frac{3V_п}{4}$ (км)

время от 9:15 до 10:00 – 45 мин $= \frac{3}{4}$ ч

Велосипедист проехал до момента встречи
$V_в \cdot x$ ч

Ясно, что $\frac{3V_п}{4} = V_в \cdot x$. Мы знаем, что $5V_п = V_в \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{3V_п}{4} = 5V_п \cdot x \Rightarrow \frac{3}{4} = 5x \Rightarrow x = \frac{3}{20}(ч) = 9$ мин

Тогда велосипедист выехал в 9:51 (через 9 мин, в 10:00, он догоняет пешехода)

Ответ: нужно выехать в 9:51

Задача 2

Рассмотрим 2 варианта:
1. $(n, 4001) = 1$
2. $(n, 4001) \neq 1$ (т.к. 4001 – простое $(n, 4001) = 4001$)

1 вар. $((n, 4001) = 1)$
Тогда $(n, n+4001) = 1$ (т.к. в противном случае $n \vdots d$, $n+4001 \vdots d$ $(d \neq 1)$. Тогда $(n+4001) - n = 4001 \vdots d$ и у n и 4001 есть общий

Чистовик 2 ... Задача 2 (продолжение)

делитель d, что неправда).

Тогда n и $n+4001$ — квадраты натур. чисел.

Объяснение:

$n(n+4001)$ — квадрат натур. числа, т.е. каждый простой делитель входит в него в чётной степени.

Пусть n — не квадрат.

Тогда найдётся простой делитель p, который входит в n в нечёт. степени. В таком случае ~~этот~~ на p должно делиться число $n+4001$, т.к. в противном случае в число $n(n+4001)$ простой делитель p входит в нечёт степени.

Но если $n+4001 \vdots p$ и $n \vdots p$, то $(n, n+4001) \neq 1$.

Следовательно $n = \cancel{a^2}\, b^2$ и $n+4001 = \cancel{b^2}\, a^2$ $(a, b$ — натур$)$

$(n+4001) - n = 4001 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$4001 = (a-b)(a+b)$ и 4001 — простое, тогда $(a+b)$ и $(a-b) = 4001$ и 1

$a-b < a+b \Rightarrow a-b = 1;\ a+b = 4001$

$2a = 4002\ (4001+1 = a+b+a-b) \Rightarrow a = 2001\ (4002:2) \Rightarrow b = 2000$

Тогда $n = b^2 = 2000^2 = 4000000$

2 вар. $((n, 4001) = 4001)$

Тогда пусть $n = 4001k$

$n(n+4001) = 4001k \cdot 4001(k+1) = 4001^2 \cdot k(k+1)$ — квадрат

Тогда $k(k+1)$ — квадрат натур. числа

(Объяснение такое же, как в прошлом варианте)

$k(k+1) = a^2$, ~~...~~ т.к. $(k, k+1) = 1 \Rightarrow k, k+1$ — квадраты натур. чисел. $k = x^2$; $k+1 = y^2$ $(k+1) - k = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 1$

$y - x = 1 = y + x \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1, x = 0.\ k = x^2 = 0.\ n = 4001k = 0$

(т.е. n — ненатурально).

Ответ: $n = 2000^2 = 4000000$

52-86-40-16
(182.3)

Задача 3 | Чистовик 3

Найдём, сколько нулей у 26!. Для этого посчитаем максимальную степень 10, на которую он делится. Для этого посчитаем максимальную степень 5, на которую он делится.

5 – 1 „5"; 10 – 1 „5"; 15 – 1 „5"; 20 – 1 „5"; 25 – 2 „5" — 6 шт.

Ясно, что „2" больше (можно убедиться 4 – 2 „2"; 16 – 4 „2", уже 6 шт.)

Тогда 26! делится на ~~16~~ 10^6 ← макс. ⇒ на конце числа 6 нулей ⇒ c = d = 0.

$26! \vdots 9$ ⇒ сумма его цифр тоже делится на 9.

$4+0+3+2+9+4+1+6+1+1+2+6+6+0+5+6+3+5+5+a+b+0+...+0 \vdots 9$

$69+a+b$ ⇒ $a+b \equiv 3$ (т.е. $a+b-3 \vdots 9$)

$26! \vdots 11$ ⇒

$~~6~~ = 4+0-3+2-9+4-1+6-1+1-2+6-6+0-5+6-3+5-5+a-b+0-...-0 \vdots 11$

$-9+a-b \vdots 11$ ⇒ $a-b+9 \vdots 11$

$a-b+9 = 11$ (т.к. если $a-b+9 \le 0$, то $a \le b-9 \le 0$; а если $a-b+9 \ge 22$, то $a \ge b+13 > 13$) ⇒ $a-b=2$

~~a+b = 3/12~~ (т.к. если $a+b-3 \le -9$, то $a+b \le -6 < 0$; а если $a+b-3 = 0/9$

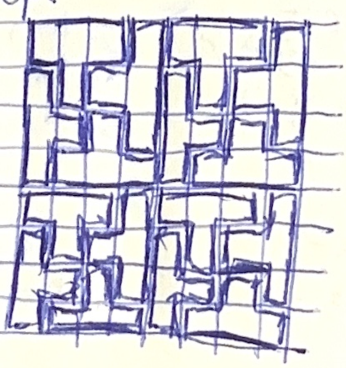
$a+b-3 \ge 18$, то $a+b \ge 21 > 18 (9+9)$) ⇒ $a+b = 3/12$.

1. $a-b=2$ и $a+b=3$ ⇒ $2a=5$ ($a=\frac{5}{2}$ – не целое)
2. $a-b=2$ и $a+b=12$ ⇒ $2a=14$ ⇒ $a=7$, $b=5$

Ответ: $a=7$; $b=5$; $c=d=0$.

Задача 5

Пример:



Это пример на 16 восьминуг.

1 восьминуг. –  ← фигура из 4х клеток.

Чистовик 4 ... Задача 5 (продолжение)

Оценка:

Т.к. разрезы можно проводить только по линиям сетки, то восьмиуг. состоит из целого числа клеток.

Тогда $64 \vdots k$ (кол-во клеток в одном восьмиуг.)

$\uparrow$
$8 \cdot 8$

если $k=1$, то это  $\leftarrow$ ~~4~~ 4 вершины (угла), это не восьмиуг.

если $k=2$, то либо , либо 

(4 угла) ~~(8~~ 7 углов) — не восьмиуг.

если $k=3$, то $64 \not\vdots 3$, поэтому не подходит.

Тогда $k \geq 4 \Rightarrow$ кол-во восьмиуг. $\geq \frac{64}{4} = 16$.

Задача 6

Построим табличку: $x+y=49$

	1 гр.	2 гр.
Кол-во чел.	x	y
Время уборки	$k+1$ ч	k ч
Длина перерыва	a ч	b ч

$m_в$ — мусор, который ~~удал~~ убирает 1 волонтёр за 1 ч.

Кол-во мусора, собраное 1-ой гр.:

$x \cdot m_в \cdot (k+1-a)$

Кол-во мусора, собр. 2-ой гр.:

$y \cdot m_в \cdot (k-b)$

$1 \leq b \leq \cancel{1} \, 1\frac{1}{3}$ (1 ч. 20 мин)

$x \cdot m_в \cdot (k+1-a) \cdot 1\frac{3}{4} = x(k+1) \cdot m_в \Rightarrow (k+1-a) \cdot \frac{7}{4} = k+1 \quad (1)$

$y \cdot m_в \cdot (k-b) \cdot 1\frac{2}{3} = \cancel{x} \, y \cdot k \cdot m_в \Rightarrow (k-b)\frac{5}{3} = k \quad (2)$

~~Тогда:~~ Тогда (1) $\Rightarrow \frac{3}{4}k + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}a \Rightarrow 3k+3=7a$

(2) $\Rightarrow \frac{2}{3}k = \frac{5}{3}b \Rightarrow 2k = \cancel{3} \, 5b$

$x \cdot (k+1-a) = y \cdot (k-b) \Rightarrow xk + x - ax = yk - yb$

Выражаем $y = 49 - x$; ~~$k = \frac{5}{3}b$~~ $k = \frac{5}{2}b$ и $a = \frac{7a-3}{3} \cdot \frac{5b}{2} = \frac{35-15}{6}b$

Получаем ~~$147 \cdot 7b = 41bx + x$~~

Тогда если $x = \cancel{2b}$, то $b < 1$

52-86-40-16
(102.3)

а если $x = 28$, то ~~$b \neq 1\frac{2}{3}$~~ $b > 1\frac{1}{3}$ Чистовик 5

~~следовательно $x = 21$.~~

$xk + x - ax = (49 - x)k - (49 - x)b$

$xk + x - ax = 49k - kx - 49b + bx$

$x \cdot \frac{5}{2}b + x - \frac{35 - 15}{6}bx = 49 \cdot \frac{5}{2}b - \frac{5}{2}bx - 49b + bx$

$\frac{5}{2}bx + x - \frac{10}{3}bx = \frac{49 \cdot 5}{2}b - \frac{5}{2}bx - 49b + bx$

$\frac{3}{3}bx + x = \frac{49 \cdot 5}{2}b - 49b$

$\frac{2}{3}bx + x = b\left(\frac{49 \cdot 5 - 49 \cdot 2}{2}\right)$

Получаем:

$2bx + 3x = 3b\left(\frac{49 \cdot 5 - 49 \cdot 2}{2}\right)$

$2bx + 3x = b\,\frac{49 \cdot 9}{2}$

Черновик 1

$t = \frac{5}{2}b + \frac{3}{2}$

$t = \frac{7a-3}{3}$

$3t + 3 = 7a$ $a = \frac{3}{7}(t+1)$

$2t = 5b$

$\frac{3}{4}t + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}a$

$\frac{15b+6}{14}$

$4001 = (b-a)(b+a)$

$h = a^2$

$1\frac{3}{4}t + 1\frac{3}{4} - 1\frac{3}{4}a = t + 1$

$b - a = 1$

$b + a = 4001$

$\frac{V_п 5}{4}$

$1\frac{1}{4}t$

$\frac{2}{3}t = 1\frac{2}{3}b$

$b = 2001$

$n = 4000000$

$V_B = 5V_п + 1$

$1\frac{2}{3}t - 1\frac{2}{3}b = t$

$n = 4001k$

$4001k(4001k + 4001)$

$(t-b)m_п \cdot y \cdot 1\frac{2}{3} =$

$= t m_п y$

$35a^2 - 46ab + 15b^2$

$4001k \cdot 4001(k+1)$

$35a^2 - 21ab - 25ab + 15b^2$

$\frac{3}{4}x$ 9 мин

$n + \frac{4001}{2}$

$1 \le b \le 1\frac{1}{3}$

$t \cdot b$

$9 : 57$

$-\frac{4001^2}{4}$

$49 \cdot 7 \cdot 4$

$c = d = 0$

$n^2 + 4001n = a^2$

$1 = (t-b)m_п \cdot y =$

$1 = b - q = 1$

$p + q =$

$p = 1;\ q = 0$

$4001n = (a-n)(a+n)$

$a + n : 4001$

$a - n : 4001$

$= 5(t+1-a)m_п \cdot x$

$-x\left(\frac{15b+6}{14}\right)$

$ty - by = tx + x - ax$

$1.\ b = 5 \mid a = 3$

$P(n) = n^2 + 4001n - a^2 = 0$

$x_1 + x_2 = -4001$

$x_1 x_2 = -a^2$

m_B – мусор/ч

$b + a = 8 \mid 17$

$ty - by = 49t - yt + 49 - y - 49a + ay$

$x + y = 49$ $b - a = 2$

$y = 49 - x$

$-4001 \pm \sqrt{4001^2 + 4a^2}$

$49 - x$ $b - a = \frac{3}{n}$

$b + a = 8$

	1 гр.	2 гр.
кол-во	x	y
часы сбора	$t+1$ ч.	t ч.
перерыв	a ч.	b ч.

$49t - tx - 49b + bx = tx + x - ax$

$y(2t - b + 1 - a) = 49t + 49$