0 446563 740005

44-65-63-74
(163.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Числова Сергея Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

Числов

44-65-63-74
(163.1)

1. $3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$. $3^{\sin x}=a$, $5^{\sin x}=b$;

~~$a+b+1=ab+a+b$; $ab=1$~~

ЧЕРНОВИК)

$a^2+b^2+1=ab+a+b.$

$a^2-ab+b^2-(a+b)+1=0$

$a^2-a(b+1)+(b^2-b+1)=0$ $D=b^2+2b+1-4b^2+4b-4=$

$=-3b^2+6b-3=$

$=-3(b^2-2b+1)=$

$=-3(b-1)^2\geq 0$. Зн, $b=1$.

Зн, $\sin x=0 \Rightarrow a=1$.

$x^3+(22+10\sqrt2)x=(10+\sqrt2)x^2+22\sqrt2;$

$x^3-(10+\sqrt2)x^2+(22+10\sqrt2)x-22\sqrt2=0$. a,b,c – корни.

$\sigma_1=10+\sqrt2$

$\sigma_2=22+10\sqrt2$

$\sigma_3=22\sqrt2$.

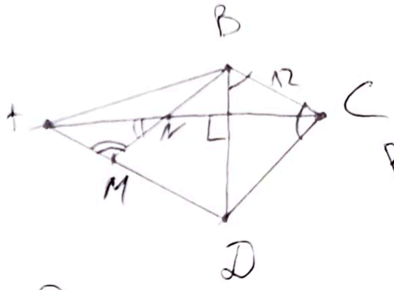
$(a+1)(b+1)(c+1)=\sigma_3+\sigma_2+\sigma_1+1=10+\cancel{\sqrt2}+22\sqrt2+22+10\sqrt2+1=$

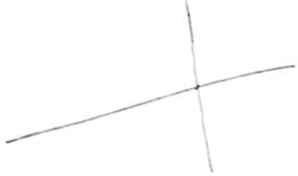
$=33+33\sqrt2=$

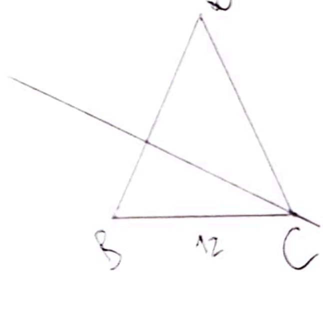
AM=AN=BD=~~BC~~ DC.

~~BD~~

BC=12. S_{ABCD}?







Н	Т	~~Н~~	Т
		0	12
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

$4+8-9=3$

$9-(4+8)=-3 \overset{7_p}{=} 8.$

$$\begin{array}{r|l} 4089 & 11 \\ \hline -33 & 37 \\ 78 & \\ -77 & \\ 19 & \end{array}$$

ЧЕРНОВИК

$(a+9-12)\cdot(9+b-2)\overset{2}{=}1$

$(a-3)\cdot(b+\cancel{7})=1$

$=12$

$=$

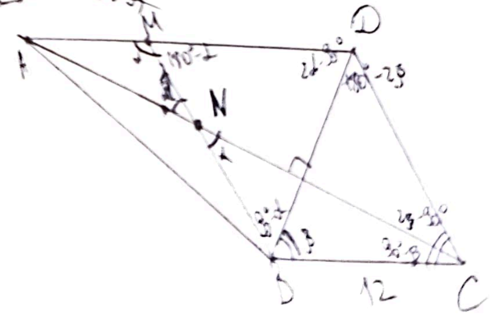
4089 → 8 − 3
4189 → 9 − 2
4289 → 10 − 1
4389 → 0
4489 → 1
4589 → 2
4689 → 3
4789 → 4
4889 → 5
4989 → −5

2900 → 7 − 4
2901 → 8 − 3
2902 → 9 − 2
2903 → −1
2904 → 0
2905 → 1
2906 → 2
2907 → 3
2908 → 4
2909 → 5

23 ; 12 ; 1 ; −10 ; −21

[−25 ; 25]

(4089, 2908) → (a = 0, b = 8) X
12 : (4089, 2903) → (a = 2, b = 3) → 23
(4289, 2903) → (a = 4, b = 5) X
1 : (4489, 2903) → (a = 4, b = 5)
−10 : (4989, 2906) → (a = 9, b = 6) X
(4189, 2909) → (a = 1, b = 9) → 19
−21 : 4689,



44-65-63-74
(163.1)

ЧЕРНОВИК

D_1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

$\pi \approx 3,1415 < 3,1416$.

$99\pi = 100\pi - \pi$

$314,1616 - 3,1416 = 311,0200$

1: X
2: 1+1
3: 1+2, 2+1 | 1+1
4: 1+3, 2+2, 3+1 | 1+1

n: 1; n-1 ⟶ (n-1; 1)

n: n-1

$$\sum_{i=1}^{n-1} i-1 = \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$d = n-1$
$L = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

11 12 21 13 22 31
14 23 32 41

1: 0/0/36
2: 1/0/35
3: 2/1/33
4: 3/3/6
5: 4/6/
6: 5/10/
7: 6/15/
8: 7/21/
9: 8/28/
10: 9/ /
11: 10/ /
12: 11/ /

	А	Н	Т
1:	0	0	36
2:	0	1	35
3:	1	2	33
4:	3	3	30
5:	6	4	26
6:	10	5	21
7:	15	6	15
8:	21	5	10
9:	26	4	6
10:	30	3	3
11:	33	2	1
12:	35	1	0

ЧЕРНОВИК

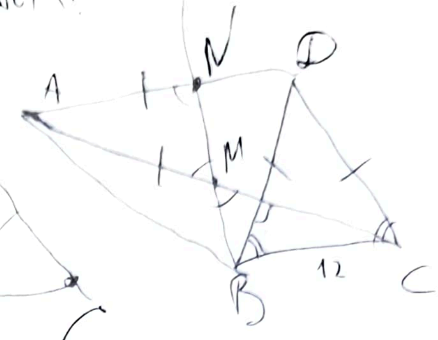
$2\sqrt{2} + 22\sqrt{2} + 20$?

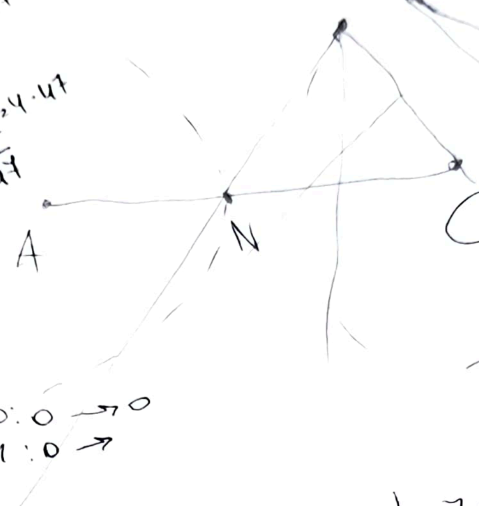
$1, 12, \cancel{23}, \cancel{34}, 45, 56, \cancel{67}, \cancel{78}, \cancel{89}$

$? \; 22\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot 20$

$x^3 - (10+\sqrt{2})x^2 + (22+10\sqrt{2})x - 22\sqrt{2} \,|\, x - \sqrt{2}$

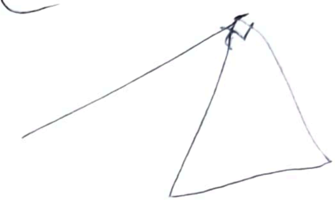
$(x-\sqrt{2})(x^2 - 10x + 22)$





$D = 10^2 + 88 = 188 = 4 \cdot 47$

$x = \frac{10 \pm 2\sqrt{47}}{2} = 5 \pm \sqrt{47}$



$x + 1 = 6 \pm \sqrt{47}$

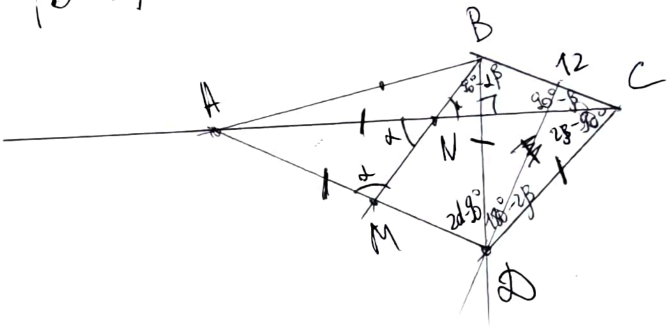
$0,0 : 0 \rightarrow 0$

$0,1 : 0 \rightarrow$

$4 \quad 0,0 \rightarrow 0$

$(a, b) \rightarrow (5a - 3b, 7a - 5b)$

$|b - a| \rightarrow |7a - 5b - 5a + 3b| = |2a - 2b| = 2|a - b|$



$a + b$

$a - c$

$b - c$

$5a - 3b - c$

$7a - 5b - c$

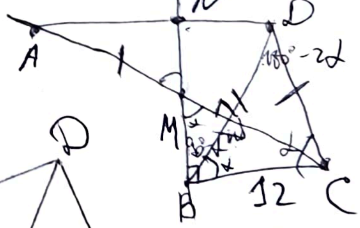
$(x - \sqrt{2})(x - (5 + \sqrt{47}))(x - (5 - \sqrt{47})) =$

$= (x - \sqrt{2})(x^2 - 10x + 22) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - 10x^2 + 10\sqrt{2}x - 22\sqrt{2} + 22x =$

$= x^3 - (10 + \sqrt{2})x^2 + x(10\sqrt{2} + 22) - 22\sqrt{2}.$

$\times 2$

$D = 12; \quad x = \frac{10 \pm 2\sqrt{3}}{2}; \; x_1 = 5 - \sqrt{3}; \; x_2 = 5 + \sqrt{3}.$



$AN \overset{?}{=} AM$

$a, b \rightarrow$

$\rightarrow (a+b), (a+b)$

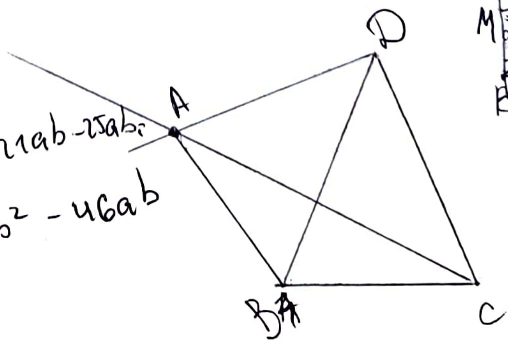
26

$ab \rightarrow \cancel{ab} \; 35a^2 - 15b^2 - 21ab - 25ab =$

$= 35a^2 - 15b^2 - 46ab$

2

24



44-65-63-74 (163.1)

Чистовая работа

1.

$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$. (1)

Пусть $a=3^{\sin x}$, $b=5^{\sin x}$. Тогда $15^{\sin x}=ab$; $3^{2\sin x}=a^2$; $5^{2\sin x}=b^2$.

Зн. (1) сводится к $a^2+b^2+1=ab+a+b$, или $b^2-b(a+1)+(a^2-a+1)=0$

Решим это ур-е как квадратное относительно b. Чтобы у него существовали корни, его дискриминант должен быть неотрицательным. Зн. $D=(a+1)^2-4(a^2-a+1)=-3a^2+6a-3=-3(b-1)^2\geq 0$.

$(b-1)^2>0$ при $\forall b\neq 1$. Зн. если $b\neq 1$, то $D<0$. Зн. $b=1$.

Зн. $1-(a+1)+(a^2-a+1)=a^2-2a+1=(a-1)^2=0$; $a=1$.

Зн. $3^{\sin x}=5^{\sin x}=1$, откуда $\sin x=0$; $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Т.к. $x\in[-3,15;\ 314]$, то $(-3,15>-2\pi)$ $k\geq -1$.

Заметим, что $\pi<3,1416$; ~~10~~ $99\pi=100\pi-\pi$.
$100\pi>314$.

Т.к. $\pi<3,1416$, то $100\pi<314,16$. С другой стороны $\pi>3,14$.

Зн. $99\pi<314,16-3,14=311,02<314<100\pi$. Зн., $k\leq 99$. Зн., $k\in[-1;99]\cap\mathbb{Z}$. Всего таких k 101. Зн. на данном промежутке (отрезке) число решений (1) равно 101.

Ответ: 101.

2.

$x^3+(22+10\sqrt{2})x=(10+\sqrt{2})x^2+22\sqrt{2}$. (1)

$\Downarrow$

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$. (*) Если a,b,c — корни (1), то

$$\begin{cases}\sigma_1=a+b+c=\cancel{10\sqrt{2}}\ 10+\sqrt{2}\\ \sigma_2=ab+bc+ca=22+10\sqrt{2}\\ \sigma_3=abc=22\sqrt{2}\end{cases}$$

$x=\sqrt{2}$ — корень (1). После этого остальные корни находятся: $x_2=5+\sqrt{3}$, $x_3=5-\sqrt{3}$.

Объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами $(a+1)$, $(b+1)$, $(c+1)$ равен $\sigma_3+\sigma_2+\sigma_1+1=33+33\sqrt{2}$.

Если параллелепипед не является прямоугольным, то зафиксируем его основание (н.т.о., ~~сторо~~ грань с рёбрами $(5+\sqrt{3})$ и $(5-\sqrt{3})$). Известно, что (пусть эта грань — $ABCD$; ~~ост~~ противоположная —

чист. работа

$A_1B_1C_1D_1$) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = \sqrt{2}$, ~~получается~~ и $A_1B_1C_1D_1$ - параллелограмм. Объём параллелепипеда равен Sh; S - площадь грани; h - длина перп-ра к ней. Т.к. мы зафиксировали грань $ABCD$, то S-const.

Но грань $A_1B_1C_1D_1$ движется так, что каждая её вершина I_1 лежит на соотв-щей сфере с центром в I и радиусом $\sqrt{2}$. Поэтому макс. знач-е h равно $\sqrt{2}$ (если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед), но мы посредством движения грани $A_1B_1C_1D_1$ можем сделать h сколь угодно маленьким. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - невырожденный параллелепипед, то его объём $V \in (0; 33+33\sqrt{2}]$

Зн., $V = Sh \xrightarrow[h\to 0]{} +0$

Ответ: $33+33\sqrt{2}$ или $V \in (0; 33\sqrt{2}+33)$.

6. Пусть Ане выпало число n.

Заметим, что для $n = 1, 2, \dots, 7$ у Тани есть ровно $n-1$ способ выкинуть на кубиках (в сумме) n. Зн., если Ане выпало число $n \in [1;7] \cap \mathbb{N}$, то ~~у Тани есть ровно~~ ровно в $n-1$ случае игра продолжится. Очевидно, что при $n = 1$ Аня проигрывает, т.к. Таня может выкинуть не меньше $1+1=2$. ~~Зн.~~

Для $n \in [\cancel{1};7] \cap \mathbb{N}$, если сущ. $n-1$ способ выкинуть на 2 кубиках в сумме число n, то сущ. $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k-1 =$

$= \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\right) - (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ способов выкинуть меньше n. ~~$n=2$: $n-1=1$~~ Зн., т.к. всего ~~вариантов упорядоченных~~ различных пар (k, m), где $k, m \in \overline{1;6}$, сущ-ет $6 \cdot 6 = 36$, то у Тани для $n \in [1;7] \cap \mathbb{N}$ сущ-ет $36 - (n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 36 - \frac{(n-1)n}{2}$ ~~спос~~ вариантов выиграть.

~~$n=1$: $n-1=0$, $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$, $36 - \frac{(n-1)n}{2} = 36$.~~

При замене выпавших Тане чисел a и b на $(7-a)$ и $(7-b)$ (биективной замене) мы получим рез-т $14-(a+b)$.

чист. работа

Если $a+b \in [2;7] \cap \mathbb{Z}$, то $14-(a+b) \in [7;12] \cap \mathbb{Z}$. Зн., случаи $n = X$ и $n = 14 - X$ аналогичны с точностью до перестановки рез-тов (ничья → ничья, п. Ани ⇆ победа Тани)

n	Кол-во способов победы Ани	Кол-во сп. -//- ничьи	-//- победы Тани
1	0	0	36
2	0	1	35
3	1	2	33
4	3	3	30
5	6	4	26
6	10	5	21
7	15	6	~~21~~ 15
8	21	5	10 ~~15~~ ~~15~~
9	26	4	~~10~~ 6
10	30	3	~~6~~3
11	33	2	1
12	35	1	0

Заметим, что всего „исходов" раунда $12 \cdot 6^2 = 432$

Как видно из таблицы, вероятность победы Ани на каждом ходу равна $\frac{0+0+1+3+6+10+15+21+26+30+33+35}{432} = \frac{180}{432} = \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 5}{3^3 \cdot 2^4} = \frac{5}{2^2 \cdot 3} = \frac{5}{12}$; вероятность ничьи (на каждом ходу) равна $\frac{0+1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{432} = \frac{36}{432} = \frac{1}{12}$; вероятность победы Тани (на каждом ходу) равна $\cancel{\frac{17}{24}}$ $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Зн., в п. А) ответ $\frac{5}{12}$. Если поб-ль не будет выявлен, то 3 хода будет ничья; вер-сть равна (т.к. каждый бросок, раунд при ничье — независимые события) $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$; больше вер-сть выиграть у Тани. ~~Она равна 1 − (вер-сть её невыигрыша) = $1 - (1-\frac{1}{2})^3$ =~~ ~~Вер-сть~~ Она не выигрывает в ~~4~~3 случаях: 1) Аня побежд. на 1-м ходу $\frac{5}{12}$;

Чист. работа

2) в 1-м р — Н, во 2-м — н. А. — $\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{144}$.

3) в 1-м и 2-м ~~р-х~~ раундах — Н, в 3-м „невыигрыш" Тани:

$\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{288}$.

В сумме получаем $\frac{5}{12}+\frac{5}{144}+\frac{1}{288}=$

$=\frac{120+10+1}{288}=\frac{131}{288}$.

Зн, вер-сть победы Тани равна $1-\frac{131}{288}=\frac{157}{288}$.

Ответ: А) $\frac{5}{12}$; Б) $\frac{1}{1728}$; В) у Тани; $\frac{157}{288}$.

4.

Рассм. остатки (возможные) чисел $\overline{4a89}$ и $\overline{290b}$ при делении на 11. За кольцо остатков по модулю 11 возьмём $\mathbb{Z}'_{11}=\{-5;-4;\dots;0;\dots;4;5\}$

~~a=0~~

a	$\overline{4a89}\ (\mathrm{mod}\ 11)$
0	−3
1	−2
2	−1
3	0
4	1
5	2
6	3
7	4
8	5
9	−5

b	$\overline{290b}\ (\mathrm{mod}\ 11)$
0	−4
1	−3
2	−2
3	−1
4	0
5	1
6	2
7	3
8	4
9	5

Пусть $\begin{cases}c=\overline{4a89}\ (\mathrm{mod}\ 11)\\ c\in\mathbb{Z}'_{11}\end{cases}$ $\begin{cases}d=\overline{290b}\ (\mathrm{mod}\ 11)\\ d\in\mathbb{Z}'_{11}\end{cases}$

Т.к. $|c|,|d|\le5$, то $|cd|\le25$.

А числа на отр-ке $[-25;25]$, дающие ост. 1 при делении на 11 — это $-21; -10; 1; 12; 23$; если $cd=k$, то $|k|\le25$ и у k есть ≥1 делитель d_k: $|d_k|\in[1;5]\cap\mathbb{Z}$ такой, что $\left|\frac{k}{d_k}\right|\in[1;5]\cap\mathbb{Z}$

Зн, $k\ne-21=(-3)\cdot7=3\cdot(-7)$ и $k\ne23$.

I) $k=-10=(-2)\cdot5=2\cdot(-5)$. ~~2 пары~~: ~~a=5, b=~~ Но для $b\in[0;9]\cap\mathbb{Z}$ $\overline{290b}\not\equiv(-5)\ (\mathrm{mod}\ 11)$. Зн, остаются варианты $(a=1, b=9)$, $(a=9, b=6)$, $(a=8, b=2)$. Составить простое число можно только из

Чистовая работа

пары $a=1, b=9$ — число 19.

II) $k=1=1\cdot1=(-1)\cdot(-1)$. 2 варианта: $(a=2, b=3)$, $(a=4, b=5)$. Простое число можно обр-ть только из 1-й пары — число 23.

III) $k=12=(-3)\cdot(-4)=(3\cdot4)$. ~~4~~ 3 варианта: $(a=0, b=0)$; $(a=6, b=8)$, $(a=7, b=7)$. ~~Вариан~~ 4-й вариант $(c=-4, d=-3)$ невозм., т.к. $\nexists a\in[0;9]\cap\mathbb{Z}$, такого, что $\overline{4a89}\equiv-4 \pmod{11}$.

Нетрудно убедиться, что ни из одной из этих пар (a,b) нельзя составить простые числа

Зн., возм. варианты пр. чисел — это 19 и 23.

Ответ: 19 или 23.

5.

Рассм. изм-е разности (модуль): $|a-b| \longrightarrow |7a-5b-5a+3b| = |2a-2b| = 2|a-b|$.

Зн. за каждую операцию разность удваивается.

Разности с другим числом: $|a-c|$, $|b-c| \longrightarrow$ (иёт. сумма)