+1 лист 12:56
+1 лист 13:41

0 050652 520005

05-06-52-52
(182.3)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 кл.

Место проведения Ростов-на-Дону
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дементьева Романа Леонидовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«05» апреля 2026 года

Подпись участника
Дем

Чистовик (1) №1.

A

Пусть скорость пешехода равна $v_п$ $\frac{км}{ч}$, велосипедиста – $v_в$ $\frac{км}{ч}$.
Пешеход с 9.15 до 10.30 шёл $1\frac{1}{4}$ ч $=$ $\frac{5}{4}$ ч. А велосипедист с 10.15 до 10.30 ехал $\frac{1}{4}$ ч. По условию т.к. в 10.30 велосипедист догнал пешехода, то их пройденный путь одинаков. То есть $v_п \cdot \frac{5}{4}ч = v_в \cdot \frac{1}{4}ч \quad | \cdot 4$

$5v_п = v_в$. Чтобы велосипедист догнал пешехода в 10.00 нужно чтобы велосипедист проехал тот же путь, что прошёл пешеход с 9.15 до 10.00. Т.е. $\frac{3}{4}v_п$. Пусть велосипедист с начала своего движения догнал пешехода за x ч. Тогда $v_в x = \frac{3}{4}v_п$. Т.к. $v_в = 5v_п$, то $5v_п x = \frac{3}{4}v_п$ $\quad 5x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{20}$ ч $=$ 9 мин. Т.е. велосипедист выехал за 9 мин до 10.00, т.е. в 9.51.

Ответ: в 9.51.

Чистовик (2) №2. (1)

$n(n+4001)=k^2$. Рассмотрим 2 варианта 1. n - квадрат натурального числа.

Тогда если $n=m^2$, то и $n+4001=l^2$, т.к. иначе не получился в произведении квадрат.

$$\begin{cases} n=m^2 \quad (1) \\ n+4001=l^2 \quad (2) \end{cases}$$ Вычтем из (2) уравнение (1).

$4001=(l-m)(l+m)$. Т.к. l, m натуральные, то $l+m>0$ и $l+m \geq 1$

Значит единственный вариант когда это возможно -

$$+\begin{cases} l-m=1 \\ l+m=4001 \end{cases}$$

$$2l=4002 \Rightarrow l=2001$$

Тогда $m=2000$. Т.е. при $n=2000^2$ это верно.

2 случай. n - не квадрат натурального числа.

Разложим n на простые множители.

05-06-52-52 (182.3)

Чистовик (3)

№ 2 (2)

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_x^{\alpha_x}$. Т.к. n - не квадрат, то найдётся $p_i^{\alpha_i}$ где α_i - нечётное.

При этом предположим, что $p_i \neq 4001$ (этот случай разберём позже)

Тогда т.к. $p_i \neq 4001$, то $n + 4001 \not\vdots\, p_i$ т.к. $4001 \not\vdots\, p_i$, а $n \vdots p_i$. Тогда степень вхождения p_i в $(n+4001)$ равна 0, а в n равна α_i, при этом α_i - нечётно. Тогда и в произведении $n(n+4001)$ p_i входит в α_i степени, т.е. нечётной $\Rightarrow$ произведение не квадрат.

Если в разложении n есть 4001, то $n = 4001y$. Тогда $n(n+4001) = 4001y(4001(y+1)) = 4001^2 y(y+1)$. Т.е. $y(y+1)$ должно быть квадратом. Но т.к. y натуральное, то $y^2 < y^2 + y < y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$. Т.е. $y^2 + y$ не будет квадратом $\Rightarrow$ этот случай также невозможен. Т.е. $n(n+4001)$ является квадратом только при $n = 2000^2$. Ответ: $n = 2000^2$

Чистовик (4) № 3(1)

Посмотрим на степень вхождения 5 в 26! По формуле Лежандра

$V_5(26!) = \left\lfloor \frac{26}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{25} \right\rfloor = 5+1=6$.

А $V_2(26!) = \left\lfloor \frac{26}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{16} \right\rfloor =$

$=13+6+3+1=23$. Значит $26! \vdots 10^6 \Rightarrow$ в конце 6 последних цифр - нули, т.е. $c=d=0$. Сумма цифр числа равна $69+a+b$. Тогда $a+b \underset{9}{\equiv} 3$, т.к. $26! \vdots 9$, то и сумма цифр числа $\vdots 9$. $2 \leq a+b \leq 18$, т.к. это цифры $\Rightarrow a+b$ либо 3, либо 12.

Также $26! \vdots 11$, посчитаем сумму цифр на чётных и нечётных местах

На неч. местах $39+b$. На чет. местах $-30+a$.

По признаку делимости $39+b-30-a \vdots 11$, т.е. $9+b-a \vdots 11 \Rightarrow b-a \underset{11}{\equiv} 2$. Из условия $a+b$ либо 3 либо 12, посмотрим варианты:

b	a
0	3
1	2
2	1
3	0
3	9
4	8
5	7
6	6

b	a
7	5
8	4
9	3

05-06-52-52 (182.3)

Черновик.

200-45=155

280-75=205

$3\frac{3}{4}+1$

$(5a-3b)^2 + (7a-5b)^2 = 25a^2 - 30ab + 9b^2 +$

$+ 49a^2 - 70ab + 25b^2 = 74a^2 - 100ab +$

$+ 34b^2$

$5a-3b-7a+5b = -2a+2b =$

$= \boxed{2(b-a)}$

15, 20, 25, 30, 35, 40

2005, 2010, 2015, 2020, 2025.

$a-b \to 2(b-a)$

$5a-3b$ $a=5k.$

$25k-3b$ $35k-5b.$

$4t_{n_1} = 3y+3.$

$49 = 2x(y+1)$ $30-a \vdots 3$ $x(3t_n+1)=49.$

$4t_{n_1} = 3y+3$

$3t_{n_2} = 2y.$ $30+a-39-b = \frac{49}{3t_{n+1}} = x$

$= -9-b+a$

$a-b \vdots 2.$

Черновик

$t_{все}\quad \nu(49-y)=\frac{5}{3}A$

$$\begin{cases}(t_{все}+1)\nu y=\frac{7}{4}A \\ t_{все}\,49\nu-t_{все}\,\nu y=\frac{5}{3}A\end{cases}$$

$\cancel{t_{все}\,\nu=\frac{7}{4}A+\frac{5}{3}A}$

$$\frac{49-y}{y}=\frac{5A}{3}\cdot\frac{4}{7A}=\frac{20}{21}$$

$$20y=21\cdot49-21y$$

$$41y=21\cdot49$$

$t_{все}\,\nu(49-y)=\frac{5}{3}A$

$(t_{все}+1)\,\nu y=\frac{7}{4}A$

$$\frac{t_{все}(49-y)}{t_{все}y+y}=\frac{20}{21}$$

$49\cdot21t_{все}-21t_{все}y=20t_{все}y+20y$

$7^3\cdot3t_{все}-20y=41t_{все}y$

Черновик

49

$1 \le t_n \le \frac{4}{3}$

$t_1 = (x+1)$

$t_2 = x$.

I	II
y	$49-y$

$t_{всё}$

I – $t_{всё}\,vy = \frac{7}{4}A$.

$(t_{всё} - t_n)\,vy = A$.

II – $t_{всё}\,v(49-y) = \frac{5}{3}A$

$(t_{всё} - t_n)\,v(49-y) = A$

$\frac{2A}{3} \cdot \frac{4}{2A} = \frac{8}{9}$

$t_{всё}\,vy = \frac{7}{4}A$

$-$

$t_{всё}\,vy - vyt_n = A$.

$vyt_{n_1} = \frac{3}{4}A$.

$vt_{n_2}(49-y) = \frac{2}{3}A$

$vyt_{n_1} = \frac{3}{4}A$.

$t_{всё}\,49v - t_{всё}\,yv = \frac{5}{3}A$.

$\frac{t_{n_2}(49-y)}{t_{n_1}y} = \frac{8}{9}$

$(t_{всё} - t_n)(49v - vy) = A$.

$49vt_{всё} - t_{всё}\,vy - 49vt_n + vyt_n = A$.

$49vt_n - vyt_n = \frac{2}{3}A$.

Черновик.

Сумма цифр - 69. $ cd = 0, 0. $

$a+b=3$ либо $a+b=12.$ $1+2.$

$\cancel{3+0}$

$39+b$ $6+0.$ $0+3$

$a | b$ $30+a.$ $39+b-(30+a)=$

$3+9$

$4+8$ $=9+\underbrace{b-a}_{\vdots 11}$

$5+7$

$6+6$ $b-a\equiv 2$

11

$7+5$ $b\equiv 2+a$

$8+4$ 11

$9+3$

$0+3$

$3+0$ 13

$1+2$

$2+1$

26 чисел.

$a, b \longrightarrow 5a-3b, 7a-5b.$

$12a-8b=$ $a+b$ $5a-3b+7a-5b=$

$=4(a-3b)$ $=\underbrace{12a-8b}_{\vdots 4}.$

$2x+2y-z=0$ 13 ч. , 13 неч.

11 2. 15 неч

$z-2x=0.$

$z=2x.$ $y=0.$ $z=2x.$

Черновик

$4001m(4001m+4001) =$ $\quad 2x-2z=0$

$y=0$.

$= 4001^2 m^2 + 4001m + 4001 = k^2$

$4001(4001m^2 + \cancel{4000}\, m + 1) = k^2$. $\quad z+2y-2z=0$

$-z+2y=0$

$2y=z$.

$4001m(4001(m+1)) = k^2$ $\quad 2(z-x)=0$.

$4001 \cdot 2(4001 \cdot 3) = 4001^2 \cdot 6$. $\quad z=x$.

$2x+2y-2z=0$.

$4001^2(m(m+1))$ $\quad -2x+\cancel{2}z=0$

$4001 \cdot 2(4001(2+1)) = 4001^2 \cdot 6$. $\quad 2x=z$.

$4001m \cdot 4001(m+1) = 4001^2(m^2+m)$

$m(m+1) = x^2$. $\quad 2x=2y=z$.

$m^2+m = x^2$ $\quad x=y$

$m^2 < m^2+m < m^2+2m+1 = (m+1)^2$

$\frac{2001+2026}{2} \cdot n = \frac{4027}{2} \cdot 26 = 4027 \cdot 13$.

неч, нег ⟶ чёт, чёт $\quad +2 \quad -2x$

чёт, чёт ⟶ чёт, чёт. $\quad +0 \quad 0 \quad y$

чётное кол-во раз: чёт, нег ⟶ нег, неч $\quad -1 \quad +1$

нег, чёт ⟶ неч, неч. $\quad -1 \quad +1 \quad z$

Черновик

$n(n+4001)=k^2$

$=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$.

p_i α_i

$\begin{cases} n=m^2 \\ n+4001=l^2 \end{cases}$

$4001=\underbrace{(l-m)}_{1.}\underbrace{(l+m)}_{4001}$

$n=2001^2$

$\cancel{2001}$ $(2000+1)^2=$

$=2000^2+4000+1$.

$+\begin{cases} l-m=1 \\ l+m=4001 \end{cases}$

$2l=\cancel{4000}\ 4002$

$l=\cancel{2000}\ 2001$.

$m=2000$.

$4001m(4001(m+1))=k^2$

$p_i\neq 4001$.

$n=4001\cdot m$.

$4001m(4001(m+1))=k^2$

$p_i=4001$.

$4001m(4001m+4001)$

$4001^2m^2+4001(m+1)$

$4001(40$

Черновик.

$n(n+4001)=k^2$

4001 - простое.

$n^2+4001n=k^2$

3 - 18.

$n^2+4001n-k^2=0.$

3, 12.

12

$D=4001^2+4k^2$

1+2

2+1

3+0

0+3

26!

$ord_5(26!)=\left[\frac{26}{5}\right]+\left[\frac{26}{25}\right]=5+1=6.$

c, d = 0.

$ord_2(26!)=\left[\frac{26}{2}\right]+\left[\frac{26}{4}\right]+\left[\frac{26}{8}\right]+$

$+\left[\frac{26}{16}\right]+\left[\frac{26}{32}\right]=13+6+3+1=23$

$ab000000 \vdots 2^8.$

$ord_2(10^6)=$

$=$

$\overline{ab}\cdot 10^6$

1000000

$\overline{ab}=4\cdot k.$

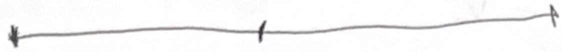
$(2\cdot 5)^6=$

$=2^6\cdot 5^6$

$4\cdot k\cdot 2^6\cdot 5^6$

Черновик.

A



v_n

9.15.

v_n.

$v_n - \frac{км}{ч}$

v_B $v_n \cdot 1$

$\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4} v_B = v_n + \frac{1}{4} v_n = 1\frac{1}{4} v_n$.

$\frac{1}{4} v_B = \frac{5}{4} v_n$.

$v_B = 5 v_n$. $\frac{3}{20}$ ч.

45 мин $= \frac{3}{4}$ ч. $\frac{3}{20} \cdot 60 = 9$ мин.

$v_n \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} v_n$ 9.51

$5 v_n \cdot x = \frac{3}{4} v_n$.

$x = \frac{3 \cancel{v_n}}{4} \cdot \frac{1}{5 \cancel{v_n}} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

05-06-52-52 (182.3)

Чистовик (5) № 3(2)

Проверим условие $b-a \underset{11}{\equiv} 2$.

$0-3 \underset{11}{\equiv} 8$

$1-2 \underset{11}{\equiv} 10$

$2-1 \underset{11}{\equiv} 1$

$3-0 \underset{11}{\equiv} 3$

$3-9 \underset{11}{\equiv} 5$

$4-8 \underset{11}{\equiv} 7$

$5-7 \underset{11}{\equiv} 9$

$6-6 \underset{11}{\equiv} 0$

$7-5 \underset{11}{\equiv} 2$

$8-4 \underset{11}{\equiv} 4$

$9-3 \underset{11}{\equiv} 6$

Т.е. нам подходит только $b=7$, $a=5$.

Ответ: $a=5$, $b=7$, $c=d=0$.

№ 4 (1)

Давайте заметим, что если мы выбираем a и b оба кратными, то пусть $a=5x$, $b=5y$.
Тогда $5a-3b = 25x-15y = 5\underbrace{(5x-3y)}_{\vdots 5}$ и

$7a-5b = 35x-25y = 5\underbrace{(7x-5y)}_{\vdots 5}$, т.е.
кол-во чисел кратных 5 не изменилось.

Если только одно из чисел a, b было кратно 5, то пусть $a \vdots 5 \Rightarrow a=5x$, Чистовик (6) № 4(2)

Тогда $5a-3b=25x-3b$, а $7a-5b=35x-5b=5\underbrace{(7x-b)}_{\vdots 5}$. Т.е.

мы получили ~~~~ снова число кратное 5 (хотя бы одно).

Если $b \vdots 5$, то $b=5y$ $5a-3b=$
$=5a-15y=5\underbrace{(a-3y)}_{\vdots 5}$. Т.е.

кол-во чисел ~~~~ кратных 5 никогда не уменьшается.

Т.к. если мы возьмём два числа не кратных 5, то кол-во кратных 5 либо не изменится либо увеличится.

Изначально чисел кратных 5 - 6 штук, 15, 20, 25, 30, 35, 40. А в конце получилось только 5 чисел кратных 5 - 2005, 2010, 2015, 2020, 2025. Но по доказанному ранее кол-во чисел кратных 5 не уменьшается $\Rightarrow$ такая ситуация получиться не могла. Ответ: нет.

Чистовик (7) № 6.

Пусть в I группе x человек, тогда во второй – $(49-x)$ человек. Пусть II группа работала y часов, тогда I – $(y+1)$ час. Тогда т.к. они выполнили одинаковое кол-во работы, то

$$v(49-x)\cdot y = v\,x\cdot(y+1),$$ где v – производительность 1 человека.

$$(49-x)\cdot y = xy + x$$

$$49 = 2xy + x = x(2y+1).$$

Пусть у II группы был перерыв t_n часов. Тогда $v(49-x)(y+t_n) = \frac{5}{3}A$. А также мы знаем, что $v(49-x)y = A$. Поделим верхнее на нижнее. $\frac{y+t_n}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$5y = 3y + 3t_n \Rightarrow 2y = 3t_n$. Тогда

$x(3t_n+1) = 49$. При этом x – целое число.

А из условию про первую группу

$v(y+1+z)x = \frac{7}{4}A$ А $v(y+1)x = A \Rightarrow$

$\frac{y+1+z}{y+1} = \frac{7}{4}$, z – время на перерыв I группы.

I $\qquad$ II $\qquad$ y - время III

x $\qquad$ $49-x$ $\qquad$ $y+1$ - время I

$4(y+1)x=A$

$4(49-x)y=A$

$\cancel{4}(49-x)y=\cancel{4}(y+1)x$

$\frac{A}{1}\cdot\frac{3}{5A}=\frac{3}{5}$. $\qquad (49-x)y=x(y+1)$

$49-xy=xy+x$

$49=2xy+x$

$49=2x(y+1)$

$4(49-x)y=A$.

$4(49-x)(y+t_{n_{II}})=\frac{5}{3}A$.

$\frac{A}{1}\cdot\frac{4}{7A}$ $\qquad \frac{y}{y+t_n}=\frac{3}{5}$

$4t_{n_1}=3y+3$.

$4(y+1)x=A$ $\qquad 5y=3y+3t_n$

$4(y+1+t_{n_1})x=\frac{7}{4}A$ $\qquad 2y=3t_{n_2}$

$\frac{y+1}{y+1+t_{n_1}}=\frac{4}{7}$. $\qquad 4y+4+4t_{n_1}=7y+7$.

05-06-52-52
(182.3)

Чистовик (8) № 6(2)

Отсюда $7y+7=4y+4+4z$.

$3y+3=4z$.

Т. к. $(3t_n+1)x=49$, x – целое, то $\frac{49}{3t_n+1}$ – целое. Поэтому

t_n дробь с знаменателем 7 $\Rightarrow$

$t_n=1\frac{1}{7}$. $\Rightarrow$ $\frac{49}{3\cdot\frac{22}{7}+1}=\frac{49^{7}}{1}\cdot\frac{22}{7\,1}$