Смена ручки: 12:40

0 143580 860005

14-35-80-86
(685.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-2

Место проведения Ростов на Дону
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы Горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Юлису Марии Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

Подпись участника

«05» апреля 2026 года

14-35-20-35 (135.3)

Чистовик

100 (96)

№1 $3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$

Пусть $a=3^{\sin x}$, $b=5^{\sin x}$, тогда $a^2+b^2+1=ab+a+b$

$a^2-ab-a-b+b^2+1=0$ | Домножим все на 2 =>

$2a^2-2ab-2a-2b+2b^2+2=0$

$(a-b)^2+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=0$

$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0$, левая часть больше или равна нулю =>

$\begin{cases} a=b, \\ a=1, \\ b=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sin x}=1 \\ 5^{\sin x}=1 \end{cases} \Rightarrow \sin x=0$
$x=\pi k, k\in Z.$

$x\in[-3{,}15; 314]$, $-3{,}15<-\pi$ => $-\pi$ - корень, то $100\pi=314$.

=> $100\pi>314$, тогда сделаем вывод, что все корни πk, $k\in[-1;99]$, K-целое => 101 решение.

Ответ: 101

№2 $x^3+(22+10\sqrt2)x=(10+\sqrt2)x^2+22\sqrt2$

$P(x)=x^3-(10+\sqrt2)x^2+(22+10\sqrt2)x-22\sqrt2$

a, b, c - корни ур-я, тогда $P(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)$

Найдем произведение длин заданных сторон, которое соответствует объему прямоуг. параллелепипеда.

$V_{max}=(a+1)(b+1)(c+1)$. Заметим связь между этими произведениями и значением многочлена

в $x=-1$

Чистовик

$P(-1) = (-1-a)\cdot(-1-b)\cdot(-1-c)$, тогда $-(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1) = -V_{max}$

Подставим $x=-1$, в начальное выражение

$P(-1) = -1^3 - (10+\sqrt{2})(-1)^2 + (22+10\sqrt{2})\cdot(-1) - 22\sqrt{2} =$

$= -1-(10+\sqrt{2}) - (22+10\sqrt{2}) - 22\sqrt{2} = -1-10-22-\sqrt{2}-10\sqrt{2}-22\sqrt{2} =$

$= -33 - 33\sqrt{2} = -33(1+\sqrt{2})$ => произведение сторон равно

$V_{max} = -P(-1) = 33+33\sqrt{2}$. Легко убедиться, что корнями ур-я являются ~~$x_1, \sqrt{2}$~~ $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{2-3} = 5 \pm 7\sqrt{2}$

Эти корни положительны, тогда длины сторон $a+1, b+1, c+1$ не равны нулю (строго больше нуля).

Тогда V(объем) из-за того, что мы меняем угол наклона параллелепипеда от 90° до 0° или до 180° угла между ребрами и объем - уменьшаются, тк синусы углов уменьшаются. Тогда ответ $(0; 33+33\sqrt{2}]$

Чистовик

№4 $\overline{4a89} \equiv 9-8+a-4 \equiv a-3 \pmod{11}$

$\overline{290b} \equiv b-0+9-2 \equiv b+7 \pmod{11}$

Т.к по условию, произведение этих чисел даёт остаток 1 при делении на 11. Тогда $(a-3)(b+7) \equiv 1 \pmod{11}$

a, b – простые числа. Следовательно его последняя цифра не может быть чётной или ~~пятерной~~ пятеркой.

Допустим, число имеет вид $\overline{a \cdot b}$, где b – посл. цифра. Тогда $b \in \{1, 3, 7, 9\}$. Рассмотрим все возможные случаи для b. 1) $b=1$, тогда $b+7=8$; $(a-3) \cdot 8 \equiv 1 \pmod{11}$

Умножим обе части на 7, т.к $7 \cdot 8 = 56$, $56 \equiv 1 \pmod{11}$:

$a-3 \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 10 \pmod{11} \rightarrow$ не подходит, т.к $a \in [0; 9]$ – цифра.

2) $b=3$, тогда ~~$b+7=10=11(a-3)$~~ $b+7=10 \equiv -1 \pmod{11}$

$(a-3) \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow a-3 \equiv -1 \pmod{11}$

$a \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow a=2, b=3$

23 – является простым числом, 32 – не подходит

3) $b=7$, тогда $b+7=14 \equiv 3 \pmod{11}$

$(a-3) \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$ | Домножим на 4

$(a-3) \equiv 4 \pmod{11}$, тогда $a=7$. Получаем число 77.

77 – не является простым

4) $b=9$, тогда $b+7=16 \equiv 5 \pmod{11}$

$(a-3) \cdot 5 \equiv 1 \pmod{11}$ $| \cdot 9$, т.к $5 \cdot 9 = 45 \equiv 1 \pmod{11}$

$a-3 \equiv 9 \pmod{11}$

$a = 12 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow a=1$. Тогда получаем $a=1, b=9$.

Чистовик

Число 19 - является простым, 91 - не подходит, т.к делится на 7 и на 13.

Тогда удовлетворяют две пары цифер a, b: (2, 3) и (1, 9)

Из которых можно составить два простых числа: 23 и 19.

Ответ: 23, 19.

№3 В выпуклом четырехуг. AMCD, AC и BD - диагонали. $AC \perp BD$. $\angle B = 90°$, $DB = DC$. $BC = 12$. $AM = AN = MD$

S-?

Решение.

1) Введем систему координат с началом в (.) O. => $AC \cap BD$. Пусть (.) O имеет координаты (0;0), диагонали лежат на осях: $B(0;b)$, $D(0;-d)$, $C(c;0)$, $A(-a;0)$, где ~~A, B, C, D > 0~~ $a, b, c, d > 0$, т.к $\angle ADC = 90°$, тогда $\overline{DA} \cdot \overline{DC} = 0$

Отсюда $a \cdot c = d^2$. Длины отрезков: $BD = b + d$, по условию $BD = DC = \sqrt{c^2 + b^2}$ => $(b+d)^2 = c^2 + b^2$. Отсюда ~~$d^2 + 2bd$~~ $d^2 + 2bd = c^2$.

2) Запишем координаты (.) M и (.) N: ~~N~~ ~~N = b+d~~ => - лежит на ~~AN~~ - лежит на AC

(.) $N = b + d$, ~~тогда N~~

тогда (.) N имеет ~~координаты~~ $(-a + b + c, 0)$. MN - прямая $\cap$ AD в точке M.

Т.к $AM = b + d$ и вычисляя точки пересечения прямых ~~получаем~~ получаем связь параметров:

Чистовик

$d = 4b$, т.к. $c^2 = d^2 + 2bd \Rightarrow c = 3b$

Тогда $a = \frac{d^2}{c} = \frac{16b}{3}$.

3) Площадь равна: $\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{16b}{3} + 3b\right)(b + 4b) = \frac{125b^2}{6}$

Т.к. $BC = 12$, то $BC^2 = \cancel{144} = b^2 + c^2 = b^2 + 9b^2 = 10b^2$

$10b^2 = 144$

$b^2 = \frac{144}{10}$

$b^2 = 14{,}4 \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{125}{6} \cdot 14{,}4 = 300.$

Ответ: 300.

№5

А) Т.к. Аня надо выбросить ровно одно из 12 своих чисел, такое же как и у Тани. Тогда вероятность ничьи равна: $\frac{1}{12}$. Рассмотрим какой-то исход бросков кубиков Тани и Ани. А теперь перевернем их, т.е поменяем кубики на противоположные грани. Сумма противоположных граней кубиков у Ани равна 13, а у Тани — 14. Это значит, что если в изначальном броске Таня выигрывала, ~~что~~ то в перевернутом она будет проигрывать или сыграет в ничью. т.к $14 - x > 13 - x$ — это случай ничьи. И $14 - a > 13 - b$, если $a < b$ — это случай проигрыша, т.е все исходы разбиваются на такие пары, и в каждой паре Таня побеждает 1 раз $\Rightarrow$ она выиграет ровно

Чистовик

в половине случаев, => это значит, что Аня выиграет с вероятностью $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

Б) Победитель не будет выявлен => три раза подряд будет ничья. Вероятность этого: $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$.

В) Расчитаем вероятность Тани победить во всей игре. Это ~~[illegible]~~ произойдет если будет победа в 1 раунде с вероятностью: $\frac{1}{2}$ или ничья в первом раунде и она выиграет второй: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.
или будет ничья в первом и втором раунде и она выиграет 3й раунд: $\left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{288}$.
Тогда общая вероятность: $\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{288} = \frac{157}{288}$.

$\frac{157}{288} > \frac{1}{2}$ => вероятность выиграть больше у Тани и она равна $\frac{157}{288}$

Ответ: А) $\frac{5}{12}$; Б) $\frac{1}{728}$; В) $\frac{157}{288}$

№6 Чистовик

Пусть $y=f(x)$, - функцию задающая график нашего многочлена. Введем вспомогательную непрерывную ф-ю от 2 переменных. $H(x,y)$

График представляет собой множ. точек в ~~пл~~ плоскости. Но для которых $H(x,y)=0$

условию вершины на графике треугольника A, B, C - лежат поэтому: $H(A)=H(B)=H(C)=0$

Пусть точка P лежит ~~внутри~~ на деньге $\triangle ABC$. Если $H(C)=0$, то сама (·) P принадлежит графику. В этом случае вырожденный отрезок состоящий из одной (·) P или любой отрезок соединяющий (·)P с вершиной. (например PA) - удовлетворяет условию: N содержит P, его концы на графике, а длина не превосходит наибольшей стороны треугольника.

Без ограничение общности, предположим, что $H(C)>0$. (случай $H(C)<0$ доказываем аналогичной заменой знаков)

Обозначим через S - множество всех точек на деньге треугольника для которых значение ф-и ~~неположител~~ не положительны: $S=\{x\in$ деньге треугольника $| H(Q)\geq 0\}$.

Т.к значение ф-и $H(x)$ - вершины равны нулю $A, B, C \in S$. В силу непрерывности функции $H(x)$, множество S - является замкнутым.

~~Черновик~~
Чистовик

Докажем, что через (·) P проходит хотя бы одна прямая пересекающая дельту треугольника в 2х точках (M и N). Таких, что (·) $M \in S$ и (·) $N \in S$.
Предположим противное — такой хорды не существует. Это значит, что для любой прямой проходящей через (·) P — хотя бы один из концов образовавший хорду строго положителен ($H(x) > 0$). Т.е не принадлежит S, другими словами из (·) P — множество S не содержит ни одной пары противоположных направлений.

Т.к замкнутое множество направлений не содержит противоположных точек, она лежит строго внутри некоторой открытой полуокружности. Тогда через (·) P ~~то~~ можно провести прямую L ~~..~~ по отношению которой со множества S лежит строго в одной полуплоскости.

Т.к $A, B, C \in S$, тогда все три вершины треугольника лежат строго по одну сторону от прямой L.
Но (·) P ∈ выпуклой оболочке точек $\{A, B, C\}$ (т.к находится внутри треугольника). => ~~то~~ (·) P — также должна лежать по эту сторону от L, что противоречит тому, что ~~сама~~ прямая L проходит через саму (·) P. Значит имеется хорда MN через (·) P для которой $H(M) \leq 0$ и $H(N) \leq 0$.

Чистовик

Рассмотрим полученный отрезок MN, на его концах $h(M) \le 0$ и $h(N) \le 0$, а внутри (·) P значение $h(P) > 0$. Функция h – непрерывна вдоль отрезка по теореме Коши о промежуточном значении на интервале PM. Обязательно существует (·) X где $h(X) = 0$, аналогично на интервале CN существует (·) Y, где $h(Y) = 0$. Точки X и Y лежат на графике многочленов (т.к $h > 0$). XY – отрезок содержит P (т.к ~~X и Y~~ ~~находи~~ (·) P заключена между X и Y)

Поскольку XY – является вложенной частью хорды MN его длина не превосходит хорды MN, а длина любой хорды внутри треугольника никогда не превосходит длины его наибольшей стороны.

Черновик

$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$;

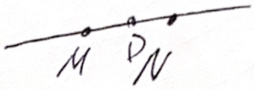
$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=5^{\sin x}\cdot 3^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$

$3^{\sin x}=a$, $5^{\sin x}=b$

$a^2+b^2+1=ab+a+b$

$\begin{array}{r} +22 \\ 11 \\ \hline 33 \end{array}$

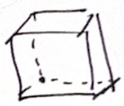
$a^2-2ab+b^2+1=-ab+a+b$



$(a-b)^2+1\cancel{+ab-a-b}=a(1-b)+b$

$(a-b)^2+1=a-ab+b$

$x^3+(22+10\sqrt{2})x=(10+\sqrt{2})x^2+22\sqrt{2}$



$x^3+10(\frac{11}{5}+\sqrt{2})x=(10+\sqrt{2})x^2+22\sqrt{2}$

$x^3-22\sqrt{2}=x((10+\sqrt{2})x-22-10\sqrt{2})$

$\cancel{x^3-22\sqrt{2}=x(}$

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

$(\sqrt{2})^3-(10+\sqrt{2})2+(22$

144+