87-97-96-00
(184.4)

0 879796 000002

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-2

Место проведения г. Пенза
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Косова Матвея Витальевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 11:55
Возвращение 11:57

Дата
«05» апреля 2026 года

Подпись участника

 80 (восемьдесят)

37-97-96-30 (184.4)

Чистовик лист 1 из 6

№1. По правилам неравенства:
($\sin x \geq 0$)

$5^{\sin x} \geq 3^{\sin x} \geq 1$ $\quad$ $5^{\sin x} \geq 3^{\sin x} \geq 1$

$5^{\sin x} \geq 3^{\sin x} \geq 1$ $\quad$ $5^{\sin x} \geq 3^{\sin x} \geq 1$

$5^{2\sin x} + 3^{2\sin x} + 1 \geq 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$,

~~и равенство достигается когда во всех наборах равны =>~~

$\cancel{=> 5^{\sin x} = 3^{\sin x} = 1 => \sin x = 0}$

Аналогично $\sin x < 0$:

$5^{\sin x} < 3^{\sin x} < 1$ $\quad$ $5^{\sin x} < 3^{\sin x} < 1$

$5^{\sin x} < 3^{\sin x} < 1$ $\quad$ $5^{\sin x} < 3^{\sin x} < 1$

$5^{2\sin x} + 3^{2\sin x} + 1 > 5^{\sin x} + 3^{\sin x} + 15^{\sin x}$

$\sin x = 0$:

$1+1+1 = 1+1+1 => \sin x = 0$

$=> x = \pi n$

$-\pi \geq -3,15 > -3,14 \cdot 2 > -2\pi$

$100\pi = 3,14 \cdot 100 > 314 \geq 99 \cdot 3,15 = 315 - 3,15 = 311,85 > 99\pi$

$=> n \in [-1; 99] =>$ Ответ: 101 корень.

Чистовик Лист 2 из 6

№2. $x^3+(22+10\sqrt{2})x=(10+\sqrt{2})x^2+22\sqrt{2}$

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

$(x-a)(x-b)(x-c)=0$

$-(a+b+c)=-(10+\sqrt{2})$

$ab+bc+ac=22+10\sqrt{2}$

$-abc=-22\sqrt{2}$

$V=(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=$

$=22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}+1=$

$=33+33\sqrt{2}=33(1+\sqrt{2})$

№4. $\overline{4a89}\underset{11}{\equiv}a+9+80+40\underset{11}{\equiv}a+8$

$\overline{290b}\underset{11}{\equiv}20+9+b\underset{11}{\equiv}7+b$

Заметим, что $xy\underset{11}{\equiv}1$ относительно x имеет только 1 решение ($y\not\vdots 11$), т.к. иначе $x_0y-x_1y\underset{11}{\equiv}0 \Rightarrow (x_0-x_1)y\vdots 11 \Rightarrow x_0-x_1\vdots 11$, но $x_0\underset{11}{\not\equiv}x_1$, тогда все подходящие пары xy:

① $1\cdot1\underset{11}{\equiv}1$

② $2\cdot6\underset{11}{\equiv}1$

③ $3\cdot4\underset{11}{\equiv}1$

④ $5\cdot9\underset{11}{\equiv}1$

⑤ $7\cdot8\underset{11}{\equiv}1$

⑥ $10\cdot10\underset{11}{\equiv}1$

Чистовик лист 3 из 6

① $a+8 \underset{11}{\equiv} 1$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 1$

$a=4$ $b=5$

45 ⋮ 3 и 54 ⋮ 2 не простые ⇒ X

② $a+8 \underset{11}{\equiv} 2$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 6$

$a=5$ $b=10$

b – цифра ⇒ ~~не подходит~~ X

③ $a+8 \underset{11}{\equiv} 3$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 4$

$a=6$ $b=8$

68 и 86 ⋮ 2 ⇒ X

④ $a+8 \underset{11}{\equiv} 5$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 9$

$a=8$ $b=2$

28 и 82 ⋮ 2 ⇒ X

⑤ $a+8 \underset{11}{\equiv} 7$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 8$

$b=1$

$a=10$ ⇒ X

$a+8 \underset{11}{\equiv} 6$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 2$

$a \underset{11}{\equiv} -2$ $b \underset{11}{\equiv} -5$

$a=9$ $b=6$

69 и 96 ⋮ 3 ⇒ X

$a+8 \underset{11}{\equiv} 4$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 3$

$a=7$ $b=7$

77 ⋮ 7 ⇒ X

$a+8 \underset{11}{\equiv} 9$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 5$

$a=1$ $b=9$

19 – простое ⇒ V

$a+8 \underset{11}{\equiv} 8$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 7$

$a=0$ $b=0$

00 – не двузн.

⇒ X

⑥ $a+8 \underset{11}{\equiv} 10$ $b+7 \underset{11}{\equiv} 10$

$a=2$ $b=3$

23 – простое ⇒ V

⇒ Ответ: $a=1; b=9$ или $a=2; b=3$

Чистовик Лист 4 из 6

№6.

		T	A
∅	1	0	$\frac{1}{12}$
1+1	2	$\frac{1}{36}$	
1+2; 2+1	3	$\frac{2}{36}$	
1+3; 3+1; 2+2	4	$\frac{3}{36}$	
2+3; 3+2; 1+4; 4+1	5	$\frac{4}{36}$	
1+5; 2+4; 3+3; 4+2; 5+1	6	$\frac{5}{36}$	
4+3; 2+5; 1+6; 3+4; 5+2; 6+1	7	$\frac{6}{36}$	
	8	$\frac{5}{36}$	
Симм.	9	$\frac{4}{36}$	
отн.	10	$\frac{3}{36}$	
7	11	$\frac{2}{36}$	
	12	$\frac{1}{36}$	

А) $\frac{10}{12}\cdot\frac{1}{36}+\frac{9}{12}\cdot\frac{2}{36}+\frac{8}{12}\cdot\frac{3}{36}+\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{36}+\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{36}+\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{36}+\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{36}+\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{36}+\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{36}=$

$=\frac{10\cdot1+10\cdot2+10\cdot3+10\cdot4+5\cdot6+10\cdot5}{12\cdot36}=$

$=\frac{\cancel{1230}\ 180}{36\cdot12}=\frac{5}{12}$

Б) вероятность случая равенства на каком-то ходу: $P_1=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{12}+\frac{2}{36}\cdot\frac{1}{12}+\ldots+\frac{6}{36}\cdot\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{12}=$

$=\frac{1}{12}$ ⇒ Случай равенства на всех 3 ходах $=\frac{1}{12^3}=\frac{1}{1728}$

В) Заметим, что вероятность победы Тани на каком-то ходу =

$=1-\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

вероятность ничьи

вероятность победы Ани

А значит вероятность победы Тани =

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{144+12+1}{288}=\frac{157}{288}>\frac{1}{2}$ ⇒

⇒ У Тани шансов больше, и выигрывает она с вероятностью $\frac{157}{288}$

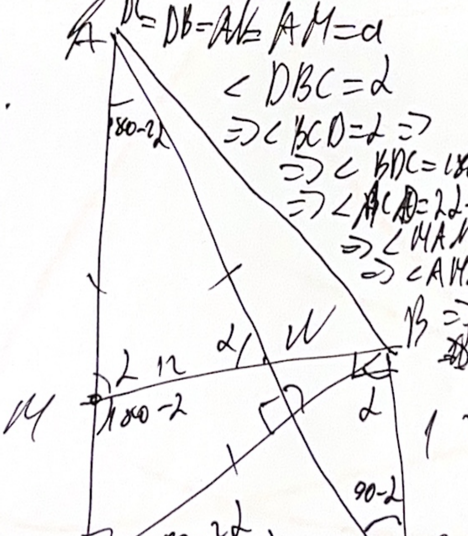
87-97-96-00 (184.4)

Чистовик. Лист 5 из 6

№5. Пусть есть какой-то набор чисел, где $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{26}$, [illegible] на $k=\sum_{i,j}(a_i-a_j)^2$, где $i>j$ и это все возможные пары i и j, тогда заметим, что для наборов 20; 21...; 45 и 2001; 2002; ...; 2026 k совпадает (т.к. все разности между a_i-a_j попарно равны в этих наборах) ~~Но также заметим что это минимальная возможная сумма~~

Заметим, что если $a; b \to 5a-3b; 7a-5b$, то $a-b \to 2(a-b) \Rightarrow \sum k \uparrow \Rightarrow$ противоречие для суммы

№3.



$DC=DB=AB$, $AM=a$

$\angle DBC=\alpha$
$\Rightarrow \angle BCD=\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BDC=180^\circ-2\alpha$
$\Rightarrow \angle ACD=2\alpha-90$
$\Rightarrow \angle MAN=180^\circ-2\alpha$
$\Rightarrow \angle AMN=\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DMN=180^\circ-\alpha$
$\angle BCD=\alpha$
$\Rightarrow MBCD$ - вписан.
1 2 $\Rightarrow \angle MBC+\angle MDC=180^\circ$
$\Rightarrow \angle MBC=90^\circ$

~~$S=\frac{AC\cdot DB}{2}=$~~

2

Черновик Вашинов (?)

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{(a+Nc)a}{2} =$$

$$= \frac{(a+12/\sin\alpha)a}{2}$$

$$a^2 + a^2 - 2\cos(180-2\alpha)a^2 = 12^2$$

$$a^2 = \frac{144}{2(1-\cos 2\alpha)} = \frac{72}{1-\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{72}{2\sin^2\alpha} = \frac{36}{\sin^2\alpha}$$

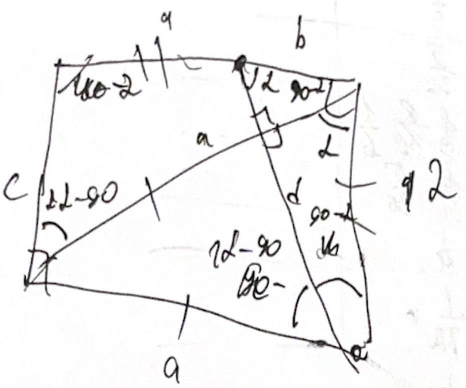
$$\Rightarrow a = \frac{6}{\sin\alpha}$$

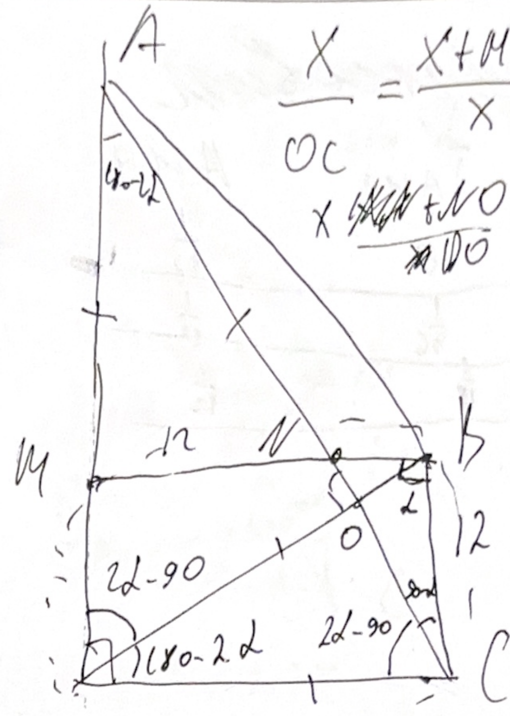
$$\frac{\left(\frac{6}{\sin\alpha} + \frac{12}{\sin\alpha}\right)\frac{6}{\sin\alpha}}{2} = \frac{54}{\sin^2\alpha}$$

Черновик

$NO = X \cdot \cos 2\alpha$

$X + NO = \cos 2\alpha (X + OMD)$





$\frac{X}{OC} = \frac{X+OMD}{X}$

$\frac{X + NO}{\cancel{X}NO} = \frac{X}{OC}$

$\alpha > 180 - 2\alpha$

$\alpha > 60$

$\cancel{ka + a^2 + ab} = ad$

$\cancel{ka \cdot tg\alpha = b}$

$b = tg(90-\alpha) a$

$d = \cancel{a \cos 2\alpha + b} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 (1 + tg^2(90-\alpha))} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$1 + \frac{\sin^2 90-\alpha}{\cos^2 90-\alpha} = \frac{1}{\cos^2(90-\alpha)} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$b = 12 tg(90-\alpha) = 12 ctg \alpha$

$d = \cancel{12 \sin} \sqrt{12^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 12^2 ctg^2 \alpha} =$

$= \frac{12}{\sin\alpha}$

$\frac{12}{\sin\alpha} a + a^2$

$c^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2\cos(90-\alpha) a(a+b)$

$c^2 = (1 + tg(90-\alpha))^2 a^2 + a^2 - 2\sin\alpha \, a^2 (1 + tg(90-\alpha)) =$

$\cancel{ka^2} + a^2 + a^2 - 2\cos 2\alpha \, a^2 = 12^2$

$\cancel{\cos 2\alpha} = \cancel{\frac{a^2 - 72}{2a^2}}$

Черновик

	Таня	Аня
1	0	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

	Т	А
1	0	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{36}$	
3	$\frac{1}{18}$	
4	$\frac{1}{12}$	
5	$\frac{1}{9}$	
6	$\frac{5}{36}$	
7	$\frac{6}{36}$ $\frac{1}{6}$	
8	$\frac{5}{36}$	
9	$\frac{1}{9}$	
10	$\frac{1}{12}$	
11	$\frac{1}{18}$	
12	$\frac{1}{36}$	

$\frac{1}{12}$

$\frac{10}{12} \cdot \frac{1}{36} + \frac{9}{12} \cdot \frac{1}{18}$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$(12a-8b)^2 - 4(2a-2b)^2$

$a;b$

$16(3a-2b)^2 - 4(a-b)^2$ $\quad a-b \quad 3(a-b)$

1 2 3 $\quad$ 0;0;3

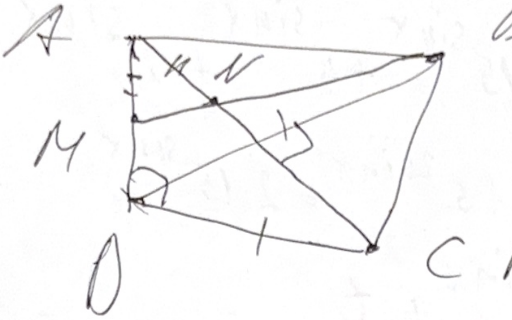
1;1;3 $\quad$ 0;3;9 $\quad \sum (7a-5b-a_i)^2 + (5a-3b-a_i)^2$?

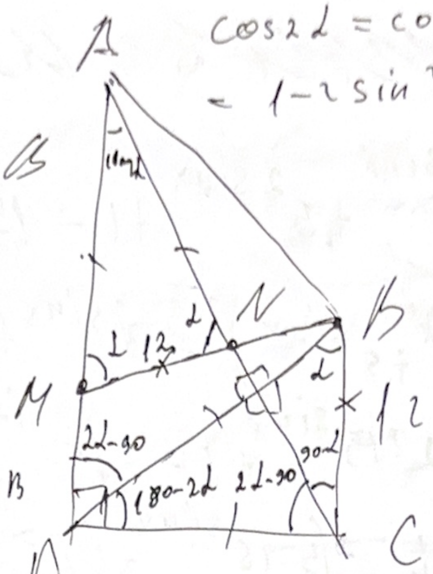
1;2;6 $\quad \sum (a-a_i)^2 + (b-a_i)^2$

2;5;15

Черновик

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$





$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

60 30

$AC = \sin\alpha \cdot 12 + tg(2\alpha - 90)x =$

$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$

$\frac{AC\cdot BD}{2} =$

$a; b \to a+b; -a-b$

$a-b \to$

$\sin(2\alpha-90) = -\cos 2\alpha$

$\cos(2\alpha-90) = \sin 2\alpha$

$\to (7a-6b)-(5a-3b) = 2$

$= 2a - 2b$

$x^2 + x^2 - 2\cos(180-2\alpha)x^2 = 12$

$x^2 - \cos 2\alpha\, x^2 = 6$

$x^2 = \frac{6}{1-\cos 2\alpha}$

$1 - \cos 2\alpha$

4485

$S = (\sin\alpha\cdot 12 + tg(2\alpha-90)x)x =$

$= 12\sin\alpha\cdot x - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{6}{2\sin^2\alpha}$

$(a+8)(b+7) \equiv_{11} 1$

~~ab+7a+8b~~ $\equiv 0$

$(5a-3b)(7a-8b) = 35a^2 + 15b^2 - 46ab$

$11a - 8b \equiv_{b} a+b$

$4000 + 1009 + 880 + 9 \equiv_{11}$

$\equiv_{11} a + 41 \equiv_{11} a+8$

Черновик

$$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$$

$$t^2=(3^{\sin x}+5^{\sin x})^2=3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+2\cdot 15^{\sin x}$$

$$t^2-2\cdot 15^{\sin x}+1=15^{\sin x}+t$$

$$t^2-t-(3\cdot 15^{\sin x}-1)=0$$

$$\cancel{D=1+12\cdot 15^{\sin x}-4=3(4\cdot 15^{\sin x}-1)}$$

$$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=3^{\sin x}(5^{\sin x}+1)+5^{\sin x}$$

$\cancel{3^{2\sin x}}$ $\sin x=k;\ k\in[-1;1]$

$$3^{2k}+5^{2k}+1=3^k\cdot 5^k+3^k+5^k$$

$\cancel{(3^k+5^k)}$ $(3^k+5^k)^2+1-2\cdot 3^k\cdot 5^k=5^k\cdot 6^k+5^k+5^k$

$$(3^k+5^k)(3^k+5^k-1)+1-3^{k+1}\cdot 5^k=0$$

$$D=1+12\cdot 15^{\sin x}-4=12\cdot 15^{\sin x}-3$$

$$t=\frac{1\pm\sqrt{12\cdot 15^{\sin x}-3}}{2}$$

$(\sin x>0)$

$\cancel{3\sin}$ $5^{\sin x}\le 3$ $\quad \sin x\le 1$

$5^{\sin x}\le 3$ $\quad \sin x\le 1$

31415 $\quad$ 3,15

$\times$ 101 $\quad\times$ 1,99

31415 $\quad$ 315-3,15

31415

317191 5