Выход: 12:34
Вернулась: 12:39

0 284984 490006

28-49-84-49
(185.5)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-2

Место проведения Ростов-на-Дону
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы Горы!"
наменование олимпиады

по математика
профиль олимпиады

Жуковой Варвары Дмитриевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

100 (90)

Чистовик

№1.

$$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$$

$[-3{,}15;\ 3{,}14]$.

$3^{\sin x} = a$

$5^{\sin x} = b$

Заметим: $15^{\sin x} = (3\cdot 5)^{\sin x} = ab$

Уравнение с заменой

$$a^2+b^2+1 = ab+a+b \quad |\cdot 2$$

$2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b=0$ — Выделим полные квадраты

$$(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=0$$

$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0$ $\quad n^2\geq 0 \Rightarrow$ каждый квадрат равен 0 (если n — действительное)

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a-b=0 & a=b & 3^{\sin x}=5^{\sin x} \\ a-1=0 & a=1 & 3^{\sin x}=1 \\ b-1=0 & b=1 & 5^{\sin x}=1 \end{cases}$$

$3^{\sin x}=1 \quad \sin x=0 \quad x=\pi k \quad k\in Z$

$5^{\sin x}= \quad \sin x=0 \Rightarrow x=\pi k \quad k\in Z$

Проведем теперь отбор корней.

Чистовик

Составим двойное неравенство для отбора:

$-3{,}15 \le \pi k \le 314$

Так как $\pi \approx 3{,}14159\ldots$, оценим границу k

левая граница $\pi k \ge -3{,}15 \Rightarrow k \ge -\frac{3{,}15}{\pi} \approx -1{,}002\ldots$

минимальное k, которое нам подходит это $k=-1$

правая граница $\pi k \le 314 \Rightarrow k \le \frac{314}{\pi} \approx 99{,}949$

Максимальное $k=99 \Rightarrow k$ принимает все значения от -1 до 99, всего их 101.

(целые значения)

Ответ: 101.

№2.

$x^3+(22+10\sqrt{2})x = (10+\sqrt{2})x^2+22\sqrt{2}$

$\cancel{(22+10\sqrt{2})x}$

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

Угадаем корень: $x=\sqrt{2} \Rightarrow$ (~~корень из 2~~ $(\sqrt{2})^3$

$(\sqrt{2})^3-(10+\sqrt{2})(\sqrt{2})^2+(22+10\sqrt{2})\sqrt{2}-22\sqrt{2}=0$

$2\sqrt{2}-10\cdot 2-2\sqrt{2}+22\sqrt{2}+10\sqrt{2}-22\sqrt{2}=0$

$0=0$ – выполнено при $x=\sqrt{2}$

28-19-84-49 (185.5)

Чистовик

$(x-\sqrt{2})(x^2-10x+22)=0$

$x^2-10x+22=0$ $\qquad x-\sqrt{2}=0$

$D=100-88=12$ $\qquad x_3=\sqrt{2}$

$x_{1,2}=\frac{10\pm2\sqrt{3}}{2}=$

$=5\pm\sqrt{3}$

$x_1+1=1+\sqrt{2}$
$x_2+1=6+\sqrt{3}$
$x_3+1=6-\sqrt{3}$
} это будут сторон нашего параллепипеда

1.) V прямоугольного параллепипеда $=(a+1)(b+1)(c+1)=$

$\sin 90^\circ=1 \Rightarrow V_{\text{прям. парал}}=\max$ (максимальные высоты будут)

$V=(1+\sqrt{2})(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})=33+33\sqrt{2}$

2.) Если это четыре (он не прямоугольный.

уменьшим углы при вершине

$V=h\cdot S_{осн}$

от уменьшение V-уменьшается до бесконечно

малой величины $\Rightarrow 0<V\le33+33\sqrt{2}$

Ответ. Максимум значение площади

~~Черновик~~ Чистовик

№4.

Имеем: числа $\overline{4a8y} \cdot \overline{290b} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$

Признак делимости на 11:

Если $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$, то знакочередующиеся суммы цифр

$(a-3)(b+2) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$

т.к. число $\overline{ab}$, простое - b - нечетное так что 1, 3, 7, 9, 5

1.) $b=1$ $(a-3)(8) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$ $a \equiv 10$ (не цифра)

2.) $b=3$ $(a-3)(10) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11) \Rightarrow a-3 \equiv 1$ $a = 2$

23 - простое

3.) $b=7$ $(a-3)(11) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11) \Rightarrow 3(a-3) \equiv 1 \Rightarrow a = 7$

77 - не простое

4.) $b=9$ $(a-3)16 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11) \Rightarrow 5(a-3) \equiv 1$ $a = 12 \equiv 1$

19 - простое

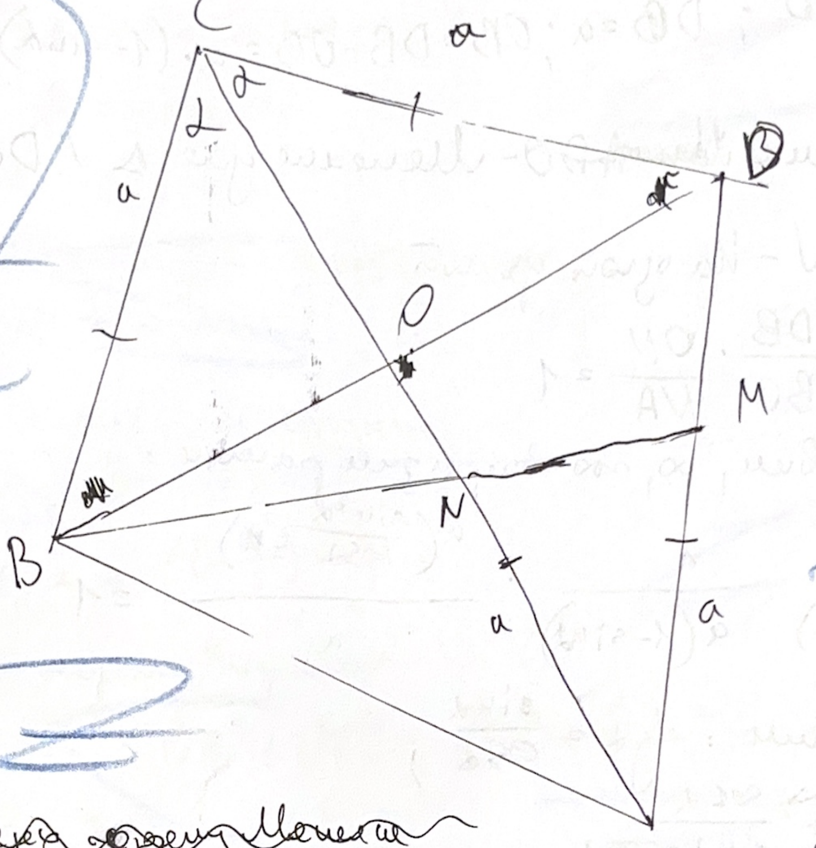
5.) $b=5$ не подходит т.к. $\overline{ab}$ делится на 5

Ответ: 19; 23.

28-49-84-49
(185.5)

Чистовик

бз



$AC \cap BD = O$

~~Ж. Через отрезки Менелая~~

1.) $AC \perp BD$ $BD = DC = AM = AN = a$

$OC = a\cos\alpha$ $\angle OCD = \alpha$

2.) В $\triangle ADC$ $\angle ADC = 90^\circ$ DO – высота в прям. △ на гипотузы

$\Downarrow$

$OD^2 = AO \cdot OC \Rightarrow AO = \frac{OD^2}{OC} = \frac{a^2\sin^2\alpha}{a\cos\alpha} = a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

3.) AD из $\triangle ADO$ или $\frac{OD}{\cos\alpha} = a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = a\,tg\,\alpha$

Т.к. $B \in DO$; $M \in AD$; $N \in AC$

Найдем разбиение $\triangle ADO$ (разбиение сторон).

Чистовик

4.) $AM = a$, значит $MD = AD - AM = a(\operatorname{tg}\alpha - 1)$

На OD; $AN = a \Rightarrow ON = AO - AN = a\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - 1\right) =$

$= a\left(\frac{\sin^2\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)$

На DO; $DB = a$; $OB = DB - OD = a\cdot(1 - \sin\alpha)$

5.) Теорема ~~Менел~~ ADO Менелая для $\triangle ADO$:

M, B, N - на одной прямой

$$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DB}{BO}\cdot\frac{ON}{NA} = 1$$

подставим, то, что выразили раньше:

$$\frac{a}{a(\operatorname{tg}\alpha - 1)}\cdot\frac{a}{a(1-\sin\alpha)}\cdot\frac{a\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - 1\right)}{a} = 1$$

Заметим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

Уравнение упрощается в:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\cdot\frac{1}{1-\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$$

умножим на знаменатель и преобразуем:

$\cancel{\sin^2\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \cos\alpha \cdot (1 - \sin\alpha)}$

$\sin^2\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin^2\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$ - приведем подобные

$2\sin^2\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0$

Т.к. $\alpha > 0$ $\sin\alpha \neq 0 \Rightarrow$ можно на него сократить

$2\sin\alpha - 1 - \cos\alpha = 0$

Черновик

$\cos\alpha = 2\sin\alpha - 1$

По осн. тригонометрическому тождеству:

$\sin^2\alpha + (2\sin\alpha - 1)^2 = 1$

$\sin^2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 1 = 1$

$5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha(5\sin\alpha - 4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \text{ — неудовлетворяет условию} \\ \sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

6.) Вычислим отрезки

$OC = \frac{3}{5} \cdot a = a\cos\alpha$

$OB = a \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot a$

По теореме Пифагора $\triangle BOC$:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = \frac{9}{25}a^2 + \frac{1}{25}a^2 = 144$

$\frac{10}{25}a^2 = 144$

$a = 6\sqrt{10}$

7.) $a^2 = 360$

S_{ABCD} — произведение диагоналей AC и BD, найдем их

$AC = AO = \frac{a\left(\frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}} = a\frac{16}{25} \cdot \frac{25}{3} = a\frac{16}{15}$

$AC = OC + OC = \frac{16}{15}\left(a\frac{3}{5}\right) = a\frac{20}{15}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} \cdot a \cdot a\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}a^2 = \frac{5}{6}a^2 = \frac{5 \cdot 360}{6} = 300$

$AC = \frac{5}{3}$

Отв.: 300.

Чистовик
№ 6.

1.) Общее количество разных возможных исходов в одном раунде:

У Тани = 12

У Ани = 6·6 (бросает 2 раза) = 36 вариантов

Всего исходов = 12 · 36 = 432

Рассчитаем разные исходы одного раунда:

1.) Ничья

На каждую из 36 комбинаций Тани, Ани нужно выбросить ~~выбросит~~ всегда ровно 1 такое самое число => Ничья - 36 исходов, вероятность = $\frac{36}{432} = \frac{1}{12}$

2.) Аня выиграет

Это будет если ее число больше суммы очков Тани.

Посчитаем для каждого броска Ани:

2.1.) при 2 - 0 исходов (у Тани 2 минимум)

2.2.) при 3 - 1 исход у Тани 2

2.3.) 4 - 3 исхода (2 или 3)

2.4.) 5 - 6 исходов (2, 3, 4)

2.5) 6, 7, 8, ... 11, 12:

Исходов победы Ани будет: 10, 15, 21, 26, 30, 33, 35.

Общее сумма нужных исходов: 1+3+6+10+15+21+26+30+33+35 = 180.

Вероятность $= \frac{180}{432} = \frac{5}{12}$

Чистовик

3.) Таня выиграет при всех остальных последовательностях => Вероятность равна $= 1-\frac{1}{12}-\frac{5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Ответим теперь на вопросы:

А.) Это победа Ани в 1 раунде: $\frac{5}{12}$

Б.) Вероятность ничьей во всех 3 раундах $=\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{1228}$

В.) За один раунд у Тани $-\frac{1}{2}$; у Ани $\frac{5}{12}$ =>

У Тани вероятность выиграть выше, она равна

Вероятность $=\frac{1}{\cancel{1}2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{144}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+144+12}{288}=\frac{157}{288}$

в 1 раунде; после 1 ничьей; после 2 ничьих

Ответ: А). $\frac{5}{12}$; Б.) $\frac{1}{1728}$ В.) У Тани: $\frac{157}{288}$.

Черновик

8) Vаше выигрыш:

Для всех остальных $\frac{12}{12}-\frac{1}{12}-\frac{5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

$(1+\sqrt{2})(6+\sqrt{2})(6-\sqrt{3})=36-3=33+33\sqrt{2}$

$\frac{16}{15}\cdot x=\frac{5}{3}$

$x=\frac{5\cdot 15^{5}}{3\cdot 16}=\frac{25}{16}$

Черновик

Б5.

$OD = a\sin 2 = \frac{4}{5a} + \frac{45}{2}$

1.) Общее количество исходов при броске всех кубиков в одном раунде.

А – 12

Всего равновозможных: $12 \cdot 36 = 432$

Г $= 6 \cdot 6 = 36$

Распишем вероят. для одного раунда

1.) Ничья

Какую бы из 36 не выбросил Таня, Аня всегда нужно выбросить 1 число из 12 граней (для ничьей)

Ничейных – 36 Вероят. $P = \frac{36}{432} = \frac{1}{12}$

2.) Аня выиграет

побеждает если её число больше очков Тани

посчитаем кол-во таких исходов для бросков Ани

$\frac{1}{12} + \frac{1}{144} + \frac{1}{1}$ 144+12+1

4.) 3 ничьи – 6 исходов (Таня выбросит 2, 3, 4)

5.) аналогично 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 – 10, 15, 21, 26, 30, 33, 35

6.) Общее число побед Ани: $1+3+6+10+15+21+26+30+$ $+33+35 = 180$! Тогда $P = \frac{180}{432} = \frac{5}{12}$

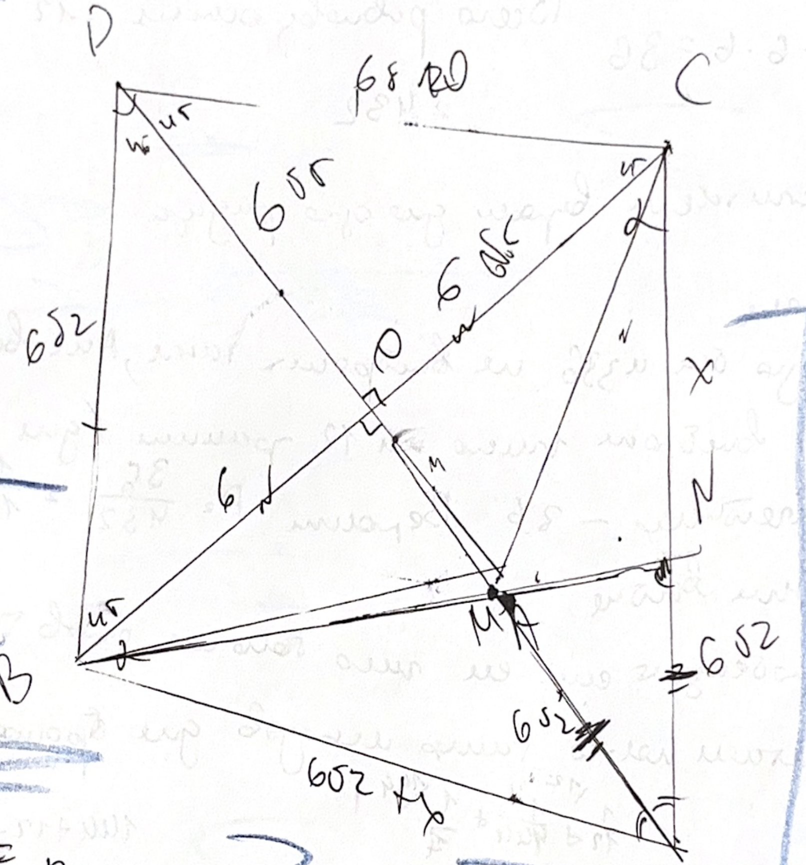
А.) Победа Ани в 1 раунде: $\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{125}{1728} = \frac{5}{12}$

Б.) Ничья: $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$

В.) У Тани: $\left(\frac{6}{12}\right)^3 = \frac{216}{1728}$ в 1 раунде, 1 ничья, 2 ничьи

$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{157}{144}\right) = \frac{157}{288}$

Черновик



SABC = DC

SABS = 6√2 6·6 = 36 BPC =

S = 6√2 + 6·6√2