0 530936 520001

53-09-36-52
(161.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Игнатьевой Юлии Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

Подпись участника

« 5 » апреля 2026 года

Чистовик

Задача 1

Когда велосипедист догнал пешехода, то расстояние до А в этот момент у них были равны => $t_n \cdot V_n = t_B \cdot V_B$
(t_n - время пешехода, V_n - скорость пешехода, t_B - время велосипедиста, V_B - скорость велосипедиста)
Будем считать время в минутах:

$75 \cdot V_n = 15 \cdot V_B \quad |:15$

$5V_n = V_B$

Пусть, время, которое велосипедист ехал, чтобы догнать пешехода в 10:00 - x, тогда:

$45 \cdot V_n = x \cdot V_B$

$x = (45 \cdot V_n) : V_B$

$x = (45 \cdot V_n) : (5V_n)$

$x = 9.$

=> за 9 минут велосипедист догонит => должен выехать в ~~10~~: 9:51

Ответ: 9:51.

Задача 2

~~пусть $n(n+4001)$ это квадрат числа k. (k-натур число)~~
~~$n(n+4001) = k^2$~~

т.к. $n(n+4001) > n^2$, то пусть это квадрат числа $(n+k)$
(k - натур. число)

$n(n+4001) = (n+k)^2$

$n^2 + 4001n = n^2 + 2nk + k^2 \quad |-n^2$

$\underbrace{4001n}_{\vdots n} = \underbrace{2nk}_{\vdots n} + k^2$ => $k^2 \vdots n$ => $k \vdots n$, пусть $k = mn$ (m-натур.)

$4001n = 2n^2m + m^2n^2$

$4001n = n(2nm + m^2n) \quad |:n$

$4001 = 2nm + m^2n$

$4001 = mn(2+m)$

т.к. 4001 - простое, то

$mn = 4001$, $2+m = 1$ или $2+m = 4001$, $mn = 1$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

53-09-36-52
(161.2)

Задача 2 (продолжение) Чистовик

$mn = 4001$ | $2+m=4001$
$2+m=1$ | $mn=1$
 | $m=3999$
$m=-1$ | $n=\frac{1}{3999}$
Противоречие (m - натур.) | Противоречие. (n - натур)

=> нет таких n, подходящих под условие.

Задача 3

$26! = \overline{40329416112660563 55 abcd 0000}$

Посмотрим сколько 0 у этого числа на конце:

$10 = 2 \cdot 5$

5 входит в это число в 6 степени $(5, 10, 15, 20, 25 = 5^2)$

2 входит как минимум в 13 степени, каждое второе число $\vdots 2$.

=> на конце этого числа 6 нулей => $c=0$, $d=0$.

Посмотрим $\vdots 9$, это число $\vdots 9$ (есть множ. 9) => сумма цифр $\vdots 9$

сейчас сумма цифр (без a и b) : 69

тогда она может стать 72 (доб. 3), 81 (доб. 12), дальше уже не может т.к. max $a+b=18$, а разница будет min $90-69=21>18$.

Посмотрим $\vdots 11$, это число $\vdots 11$ (есть множ. 11)

=> знакопеременная (разница) ~~сумма~~ цифр на четных и нечетных позициях $\vdots 11$.

сейчас на четных: 30, на нечетных: 39 => разница 9

тогда она может стать 0, 11, ~~22~~, дальше не может т.к. max $|b-a|=9$ а будет $22-9>9$

~~Теперь разберем~~ станет 0: $a=9$, $b=0$, но мы знаем, что $b \neq 0$, значит этот вариант не подходит.

Разберем оставшиеся варианты:

получили что разница на чет и нечет позициях будет 11 => $b-a=2$

если $a+b=3$, то $b-a \neq 2$

$\begin{cases} a+b=3 \\ b-a=2 \end{cases}$ $b=a+2$ => $2a+2=3$

Чистовик

Задача 3 (продолжение)

значит, остался 1 вариант

$$\begin{cases} a+b=12 \\ b-a=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow b=7,\ a=5$

Тогда получили, что $a=5$, $b=7$, $c=0$, $d=0$.

Ответ: $a=5$, $b=7$, $c=0$, $d=0$.

Задача № 5

Чтобы кол-во фигурок было наиб, их площадь должна быть наим., поэтому найдем наим. площадь 8-угольника

$S=1$

 ← 4-угол.

$S=2$

 ← 4-угол.

$S=3$

 ← 4-угол.

 ← 6-угол.

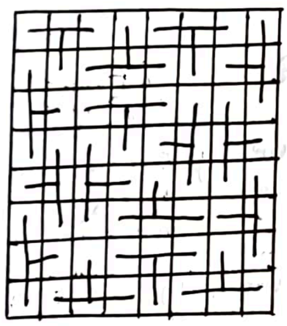
$S=4$

 ← 8-угол.

получили, что наиб площадь - 4

$\Rightarrow$ фигурок max $\frac{8\cdot 8}{4}=16$.

Пример:



← 16 8-угольников.

Ответ: 16.

Задача 4

Посмотрим, что происходит с числами каждые 2 хода:

$a \quad 5a-3b \quad 5(5a-3b)-3(7a-5b)=25a-15b-21a+15b=4a$

$b \quad 7a-5b \quad 7(5a-3b)-5(7a-5b)=35a-21b-35a+25b=4b.$

Получили, что за 2 хода каждое число увеличивается в 4 раза.

Чистовик

Задача 4 (продолжение)

Посмотрим на первое число (15).

Значит, что если ~~число~~ его изменили 2 раза, то дальше оно всегда будет четным, потому что min соседнее число тоже будет четным, а $5a-3b$ — не меняет четность, но 2001 - нечет.

Значит, над первым число проводили эту операцию 1 раз, но тогда $15\cdot5-3b=2001$, что невозможно, значит такие числа не могли получиться на доске.

Ответ: нет.

80 (восемьдесят)

53-09-36-52
(151.2)

Черновик

1.

A

9:15 пешеход

10:15 велосипедист

к 10:30

п: $t = 1$ ч 15 мин, $V_п$

в: $t = 15$ мин, $V_в$

$V_п \cdot 1\frac{1}{4} = V_в \cdot \frac{1}{4}$

$V_п \cdot \frac{5}{4} = V_в \cdot \frac{1}{4}$

$5V_п = V_в$

$75V_п = 15V_в$

$5V_п = V_в$

$45V_п = ?V_в$

за 9 мин догонит

9:15

$V_п$

A

за 45 мин

$\frac{3}{20}$ ч $= 9$ мин

Ответ: в 9:51.

$\frac{3}{4}V_п = ?V_в$

$\frac{3}{4}V_п = \cancel{\frac{20}{3}}V_в$

$\frac{3}{20}V_в$

$5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

$\frac{20}{3} : \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$

2. 4001 – простое

$n(n+4001) = k^2$

$n^2 + 4001n = k^2$

$k^2 - n^2 = 4001n$

$(k-n)(k+n) = 4001n$

4001 – входит в 1 из скобок

$\overline{abcd} = 5700$

$a, b = 5, 7$

$30+5 \; ? \; 39+7$

$35 \xrightarrow{11} 46$ ✓

3. 5 входит в 6 степени

5, 10, 15, 20, 25

а двойка точно входит в 6 степени, т.к каждое второе число :2, а это уже 13.

=> на конце числа будет 6 нулей, стоят только 4

=> $\overline{cd} = 00$

сумма цифр 69 –> 72, 81, 90
3, 12, 21

число :9 => сумма цифр :9

403294161126605635 5 abcd 0000

4 7 9 18 22 23 29 40 42 48 54 59 65 68 78

6 12 13 19 19 25 30

разница 11
22

30a

$30 + a = 39 + b$

5·10

69

4 - 2

2, 0 5 6 1

4032941611266056355 ab 000000

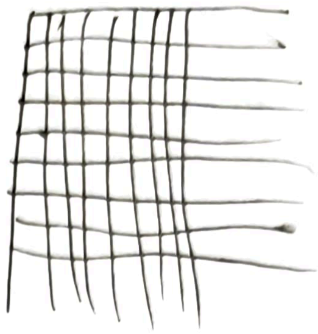
4 7 16 17 18 20 26 31 34 39

$y(a-b)$ [illegible]

$y(a-b) = 2$

Черновик

5.

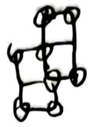


S = 1

 - 4 угол

S = 2

 - 4 угол.

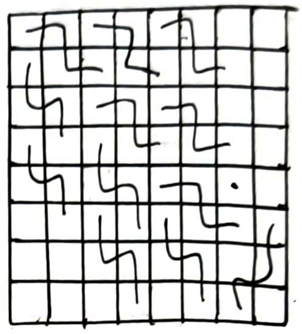


min S = 4

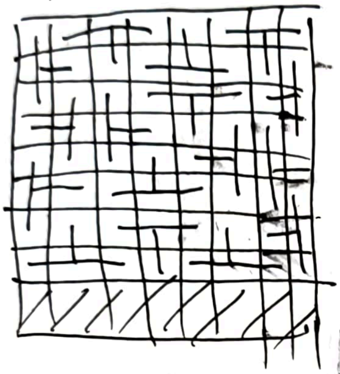
S = 3

 - 4 угол.

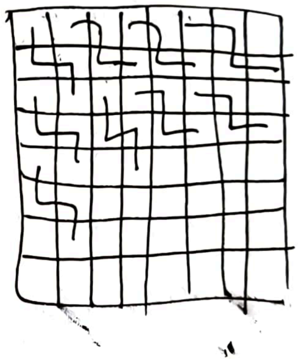
 - 6 угол.



Пример: S = 4



фигурок 20.



$a + b = 3$

$b - a = 2$

$\cancel{a = b}$

$b = a + 2$

2. $n(n+4001) = (n+k)^2$

$n^2 + 4001n = n^2 + 2nk + k^2$

$2nk + k^2 = 4001$

$k(2n+k) = 4001$

$3999 \times 2 = 4001$

$k = 1$ $\quad$ $k = 4001$

$2n + k = 4001$ $\quad$ $2n + k = 1$

$2n = 4000$ $\quad$ Противоречие.

$n = 2000$

$mn = 4001$ $\quad$ $2 + m = 4001$

$2 + m = 1$ $\quad$ $m = 3999$

$m = -1$ $\quad$ $mn = 1$ X

$n = -4001$

$2000(2000 + 4001) = (2000+1)^2$

$6001 \times 2000 = 12002000$

$\cancel{2006}$

2001×2001

$n(n+4001) = (n+k)^2$

$n^2 + 4001n = n^2 + 2nk + k^2$

$2nk + k^2 = 4001n$

$k \vdots n$ $\quad$ $k = mn$

$2mn^2 + (mn)^2 = 4001n$

$n(2mn + m^2n) = 4001n$

$2mn + m^2n = 4001$

$mn(2+m) = 4001$

Черновик

(2) $n(n+4001) > n^2$

$\Rightarrow n(n+4001) = (n+k)^2$

$n^2 + 4001n = n^2 + 2nk + k^2$

$\underbrace{4001n}_{\vdots n} = \underbrace{2nk}_{\vdots n} + k^2 \Rightarrow k^2 \vdots n \Rightarrow k \vdots n \Rightarrow k = mn$

~~4000~~ $4001n = 2n^2m + m^2n^2$

$4001n = n(2nm + m^2n)$

$4001 = 2nm + m^2n$

$4001 = mn(2+m)$

$mn = 4001$
$2+m = 1$
$m = -1$
$n = -4001$ X

$2+m = 4001$
$mn = 1$
$m = 3999$
$n = \frac{1}{3999}$ X

2001 | 15, 133 ... 6

133 132 21

2001

$2^{10} = 1024$

$4^5 = 1024$

15 · 64 = 60, 90, 960

$2001 = 15 \cdot 4^3$

2001 − 1024 = 977

$2002 = 16 \cdot 4^3$

2001 − 960 = 1031

2002 − 1024 = 1078

16 · 64 = 64, 96, 1024

4. $a, b \to 5a - 3b,\ 7a - 5b$

~~сумма~~

разница: $a - b \to 5a - 3b - 7a + 5b = -2a + 2b = 2(b-a)$

$b - a \to 7a - 5b - 5a + 3b = 2a - 2b = 2(a-b)$

$2b - 2a$

$a - b \to 2(b-a)$

$(5a-3b)(7a-5b)$

$35a^2 - 25ab - 21ab + 15b^2$

$35a - 46ab + 15b^2$

960 и 1024

$5(960 - 3 \cdot 1024$ $\quad 7 \cdot 960 - 5 \cdot 1024$

$a, b \to \overset{a=}{5a-3b} \quad \overset{b=}{7a-5b}$

$5(5a-3b) - 3(7a-5b)$ $\quad 7(5a-3b) - 5(7a-5b)$

$25a - 15b - 21a + 15b$ $\quad 35a - 21b - 35a + 25b$

$4a$ $\quad 4b$

каждые 2 хода пара чисел увеличивалась в 4 раза

960 · 5 = 4800

4800 − 3072 = 1629 (1728)

7 | 1031

2026 | 40, 200, 26, 50

2025 | 39, −166, 46, 265, −234, 31

2001 | 15, −15, 50, −45, 50, −45, 51, 133

2001 | 15, 133, −15, 50, −45, 51, −45, 6