0 547548 130009

54-75-48-13
(185.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-1 (11)

Место проведения КАЗАНЬ
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы!
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Фазлизянова Дамира Маратовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» 04 2026 года

Подпись участника

Беловик – 1

№1.

$$(2^{\sin x})^2+(7^{\sin x})^2=2^{\sin x}\cdot 7^{\sin x}+2^{\sin x}+7^{\sin x}-1$$

отниму от обеих частей $2\cdot 2^{\sin x}\cdot 7^{\sin x}$

тогда получу

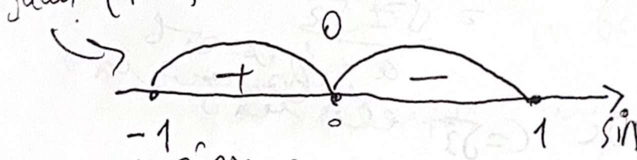
$$(2^{\sin x}-7^{\sin x})^2=2^{\sin x}+7^{\sin x}-2^{\sin x}\cdot 7^{\sin x}-1$$

$$(2^{\sin x}-7^{\sin x})^2=2^{\sin x}(1-7^{\sin x})+7^{\sin x}-1$$

$$(2^{\sin x}-7^{\sin x})^2=(1-7^{\sin x})(2^{\sin x}-1)$$

Теперь заметим, что ≥ 0 т.к. квадрат

знак $(1-7^{\sin x})$



$t\in[-1;1]$

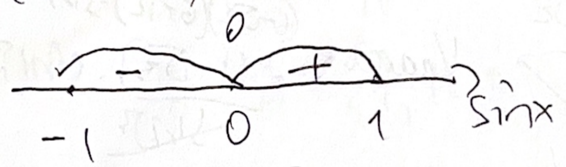
7^t возр.

и 2^t возр и

т.к $2^0=1$

и $7^0=1$

знак $(2^{\sin x}-1)$



то

$\Rightarrow$ т.к их перемножение ≤ 0

то наш подх только $\sin x=0$

$\sin x=0$

$x\in\{\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$

теперь зам, что $k > -1$, так как

$-\pi < -3{,}1415 \Rightarrow -\pi < -3{,}14$

также зам, что $k\leq 100$ т.к

$\pi\cdot 100 > 314{,}1$ но $\pi\cdot 100 < 315$ и т.к $\pi > 1$

то $\pi\cdot 100+\pi > 314{,}1+1 \Rightarrow$ не подх > 100

$\Rightarrow$ ответ: 101 (т.к $k\in\mathbb{Z}$ и $k\in[0;100]$)

Беловик-2.

№2.

$$x^3+(23+10\sqrt3)x-(10+\sqrt3)x^2-23\sqrt3=0$$

восп. теор. обр. теор. Виета

$$a+b+c=10+\sqrt3$$
$$ab+ac+bc=23+10\sqrt3$$
$$abc=23\sqrt3$$

доп $c=\sqrt3$ тогда $a+b=10$ и $ab=23$.

$b=10-a$

$(10-a)\cdot a=23$

$a^2-10a+23=0$

$$\frac{10\pm\sqrt{100-92}}{2}=\frac{10\pm\sqrt8}{2}$$

$=5\pm\sqrt2$

а и b соотв. неважно, что есть что

$a=5-\sqrt2$ $b=5+\sqrt2$ $c=\sqrt3$

$$V_{парал}=\frac{(6-\sqrt2)(6+\sqrt2)\cdot\sin\alpha\cdot(1+\sqrt3)\cdot\sin(\beta)}{\sin\beta}$$

$$=\frac{34\cdot\sin\alpha\cdot(1+\sqrt3)\cdot\sin(\beta)}{\sin\beta}$$

т.к. перп высоту < сторон и $x\cdot y\cdot\sin\alpha \le x\cdot y$

наибольшее значение $34(1+\sqrt3)$

в зав. от углов α и β м/б и наибольшее либо мен., но отн. $\to 0$ см.

$V_{пара}\in(0;34(1+\sqrt3)]$

Ответ: $V_{парал}\in(0;34(1+\sqrt3)]$

54-75-48-13 (185.1)

Беловик-3.

№4.

$7830 \,|\, 11$, 712; 77, 13 (23), 22, 10

$7830 \equiv_{11} 10$

$7831 \equiv_{11} 0$

$\vdots$

$7839 \equiv_{11} 8$

$94 \cdot 50 = 590$

$1000 + b \cdot 100 + 9 \equiv_{11} ?$ $\quad 1000 \,|\, 11$, -99, 10, 90

$1000 \equiv_{11} 10$

$19 + b \cdot 100 \equiv_{11} ?$ $\quad 100 \equiv_{11} 99 + 1 \equiv_{11} 1$

$19 + b \equiv_{11} ?$ $\quad b \in [0; 9]$, $b \in \mathbb{Z}$

$8 + b \equiv_{11} ?$

$\equiv_{11} \to 8, 9, 10, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$b \in 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

Теперь найдем, когда

$x \cdot y \equiv_{11} 1$?, x и $y \in [0; 10]$ и $x, y \in \mathbb{Z}$

$x \cdot y \in \{1, 12, \underset{\text{пр}}{23}, 34, 45, 56, \underset{\text{пр}}{67}, 78, \underset{\text{пр}}{89}, 100\}$

1. $x = 1$ $y = 1$

12. $x = 2$ $y = 6$ (иначе) $y = 4$ $x = 3$ $x = 4$ $y = 3$

$34 = 2 \cdot 17$ ~~плохо~~ $17 \equiv_{11}$ плохо т.к. $17 > 10$ и пр.

$45 = 5 \cdot 9$ $\quad x = 5$ $y = 9$ $\quad x = 9$ $y = 5$

$56 = 7 \cdot 8$ $\quad x = 7$ $y = 8$ $\quad y = 7$ $x = 8$

$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ $\quad$ $13 > 10$ и пр. плохо

$100 = 10 \cdot 10$ $\quad y = 10$ и $x = 10$

Беловик-4.

№4 продолж.

$x=1$ и $y=1 \Leftrightarrow a=4$ и $b=4$ нельзя т.к. $\vdots 2$

$x=2$ и $y=6 \Leftrightarrow a=3$ $b=9$ нельзя $\vdots 3$

$x=6$ и $y=2 \Leftrightarrow a=7$ и $b=5$ ~~57 $\vdots 3$ простое нельзя~~!

$x=4$ и $y=3 \Leftrightarrow a=5$ и $b=6$ 56 нельзя $\vdots 2$ тоже

$x=3$ и $y=4 \Leftrightarrow a=4$ и $b=7$ 47 - простое, нам!

$x=5$ и $y=9 \Leftrightarrow a=6$ и $b=1$ 61 простое нам!

$x=9$ и $y=5 \Leftrightarrow x=9$ невозм $0 \neq x$

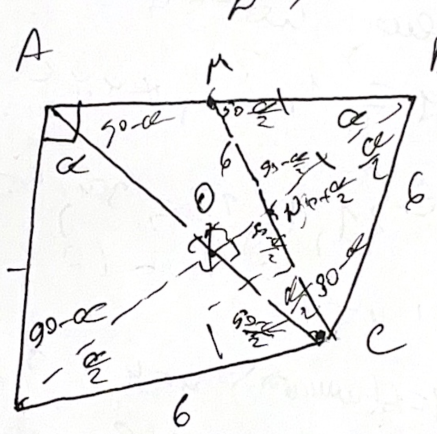
$x=7$ и $y=8 \Leftrightarrow a=8$ и $b=0$ 10 $\vdots 2$ нельзя

$x=8$ и $y=7 \Leftrightarrow y+1$ невозможно

$x=10$ и $y=10 \Leftrightarrow a=0$ и $b=2$ невозм $20 \vdots 2$ и однозн.

Ответ: ~~...~~, 47, 61

№3



D об. $\angle ABD=\alpha \Rightarrow \angle ADB = 90-\alpha$

и $\Rightarrow \angle DAO=\alpha \Rightarrow \triangle DAC = \triangle MBN$

и т.к. $\triangle ADC$ и $\triangle MBN$ - р/б $\Rightarrow$

$\angle BMN = \angle BNM = \angle ACD = \angle ADC = 90-\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle ADC = \angle ADB = \angle BDC = \frac{\alpha}{2}$

и $\angle DNC = \angle MNB$ верт

54-75-48-13 (185.1)

Беловик-Т

ч/ $\angle ACN = 90 - \angle MNB = \frac{\alpha}{2}$

Докрызали, что $\angle DCM = 90 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$= 90$ ($\angle DCA + \angle ACN$)

ч/ четыр AMCD - впис.

ч/ $AM = NC$ (т.к углы впис равны)

от $AM = NC = y$

а $AD = AC = MB = NB = x$

Теперь $DM^2 = x^2 + y^2 = (6+y)^2 + 36$ ($\triangle DAM$ - пр, $\triangle DCM$ - пр)

$x^2 + y^2 = 36 + y^2 + 12y + 36$

$y = \frac{x^2}{12} - 6$

Также зам $\angle DBC = \frac{\cup DC - \cup NC}{2} = \frac{2\alpha - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

т.к $\cup DC = 2 \cdot \angle DAC$
и $\cup NC = 2 \cdot \angle NDC$

ч/ $\triangle DBC$ р/б $\angle BDC = \angle DBC = \frac{\alpha}{2}$

ч/ $BC = 6$ ~~ан~~

~~а изл $\angle ACB = 90 - \angle DBC = 90 - \frac{\alpha}{2} = \angle ADB$~~

~~а чет ADCB - внис~~

~~и т.к $\angle DAB = 90 - \angle ABD = 90 - \alpha$, то~~

~~$AB = BC$ т.е. р/б.~~

~~$\frac{x^2}{12} - 6 + x = 6$~~

~~$\frac{x^2}{12} + x - 12 = 0$~~

~~$x^2 + 12x - 144 = 0$~~

~~$x_1, x_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 144}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{5} \cdot 12}{2}$~~

~~$= \frac{12(\pm\sqrt{5} - 1)}{2}$ ч/ $x = \frac{12(\sqrt{5} - 1)}{2}$~~

~~в $\triangle DAB$ и ах $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$~~

~~Ск. знаю $\triangle DAB = x \cdot (\frac{x^2}{12} - 6 + x)$~~

~~и $S_{DCB} = \frac{1}{2} \sin(180 - \alpha) \cdot 36$~~

~~остовшая невыностось из-за лажи в 1 половине реш~~

Шифровщик №5 Бельдин-6

А) Вася

1	x	
2	1+1	$\frac{1}{36}$
3	1+2; 2+1	$\frac{2}{36}$
4	1+3; 2+2; 3+1	$\frac{3}{36}$
5	1+4; 2+3; ...	$\frac{4}{36}$
6	1+5; 2+4; 3+3; ...	$\frac{5}{36}$
7	1+6; 2+5; 3+4; ...	$\frac{6}{36}$
8	2+6; 3+5; 4+4; ...	$\frac{5}{36}$
9	3+6; 4+5; 5+4; 6+3	$\frac{4}{36}$
10	4+6; 5+5; 6+4	$\frac{3}{36}$
11	5+6; 6+5	$\frac{2}{36}$
12	6+6	$\frac{1}{36}$

Петя-12 $\frac{1}{12} \cdot \frac{35}{36}$

Петя-11 $\frac{1}{12} \cdot \frac{33}{36}$

⋮

Петя-2 $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$

$$\frac{1}{12}\left(\frac{35}{36}+\frac{33}{36}+\frac{30}{36}+\frac{26}{36}+\frac{21}{36}+\frac{16}{36}+\frac{11}{36}+\frac{7}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}\right)$$

$$\frac{1}{12}\left(1+1+\frac{33}{36}+\frac{26}{36}+\frac{21}{36}+\frac{16}{36}+\frac{11}{36}+\frac{7}{36}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{33+26+21+16+11+7}{12\cdot 36}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{4\cdot 26}{12\cdot 36}=\frac{1}{6}+\frac{26}{3\cdot 36}=\frac{2\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 18}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{13}{3\cdot 6\cdot 3}=\frac{9+13}{3\cdot 6\cdot 3}$$

$$=\frac{22}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 2}=\frac{11}{27}$$

Ответ: $\frac{11}{27}$

Б) Я посчитал вероятность выигрыша Пети $= \frac{11}{27}$

а проигрыш и ничья $= \frac{16}{27}$ ничья 7

2 у обоих $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$ (пользуюсь таблицей) больше 7

$$\frac{1}{12}\left(2\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}\right)+\frac{6}{36}\right)$$

$$\frac{1}{12}\left(2\cdot\frac{15}{36}+\frac{6}{36}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{30}{36}+\frac{6}{36}\right)=\frac{1}{12}$$

за одну игру

а три игры подряд $\left(\frac{1}{12}\right)^3$

Ответ: $\left(\frac{1}{12}\right)^3$

В) при одном броске кубиков

$P(\text{выиграл Петя})=\frac{11}{27}$ $P(\text{выиграл вася})=\frac{27}{27}-\frac{1}{12}-\frac{11}{27}$ $=\frac{16}{27}-\frac{1}{12}$

$P(\text{ничья})=\frac{1}{12}$

за три игры

$P(\text{выиграл петя})=\frac{11}{27}+\frac{1}{12}\cdot\frac{11}{27}+\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{11}{27}$

$P(\text{выиграл Вася})=\frac{16}{27}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\left(\frac{16}{27}-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{12^2}\left(\frac{16}{27}-\frac{1}{12}\right)$

то есть нужно понять, что больше

$\frac{11}{27}$ или $\frac{16}{27}-\frac{1}{12}$

$\frac{11\cdot12}{27\cdot12} \ ? \ \frac{16\cdot12-27}{27\cdot12}$

$11\cdot12 \ ? \ 16\cdot12-27$

$27 \ ? \ 12(16-11)$

$27 \ ? \ 12\cdot5$ $\frac{11}{27}<\frac{16}{27}-\frac{1}{12}$

$27<60$ а

а у васи вер. выиг. больше, чем у Пети а

$P(\text{Вася})=\frac{16}{27}\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}\right)-\frac{1}{12}-\frac{1}{12^2}-\frac{1}{12^3}$

$=\frac{16}{27}\left(\frac{12^2+12+1}{144}\right)-\frac{12^2+12+1}{12^3}=$ на сл стр [illegible] — 8 [illegible] — 8

$$\frac{144+121}{144}\left(\frac{16}{27}-\frac{1}{12}\right)=\frac{157}{144}\cdot\left(\frac{12\cdot16-27}{27\cdot12}\right)$$

$$=\frac{157}{144}\cdot\frac{165}{27\cdot12}=\frac{157\cdot5\cdot3\cdot11}{144\cdot27\cdot4\cdot3}=\frac{157\cdot55}{144\cdot27\cdot4}=\frac{8635}{15552}$$

Ответ:

~~№6~~

$f(x)=a_{2026}x^{2026}+\ldots+a_1x+a_0$

№3 продолж.

$\triangle ADC$

$36=2x^2-2x^2(\cos\alpha)$

$18=x^2(1-\cos\alpha)$

$S_{\triangle DMB}=\frac{1}{2}x\cdot\left(x+\frac{x^2}{12}-6\right)$

$S_{DMCB}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin(180-\alpha)=\frac{1}{2}\cdot36\cdot\sin\alpha$

$S_{\triangle ABCD}=\frac{1}{2}\left(x\left(x+\frac{x^2}{12}-6\right)+36\cdot\sin\alpha\right)$

Тогда по теор. синусов ADC

$\frac{6}{\sin\alpha}=2\cdot R=DM$

$6=DM\cdot\sin\alpha$

$6=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{12}-6\right)^2}\sin\alpha$

~~$36\cdot\sin\alpha=6\cdot$~~

$S_{\triangle ABCD}=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^3}{12}-6x+\frac{36\cdot6}{\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{12}-6\right)^2}}\right)$

Беловик-9.

черновик 3.

7539 · 1809 ≡ 1

1 1 6

2

3

12 83 34 67 78

45 56

95 100

165 | 8
16 | 33

9930 | 11
77 | 72
23
22
10

12 = $2^2 \cdot 3$ 2·64   4·3

34 = 2·17 ×

45 = $3^2 \cdot 5$

56 = $7 \cdot 2^3$

78 | 2
6 | 39
18
3·13
2·3·13×

7930 ≡ 10

7931 ≡ 0

7939 ≡ 11

157 | 27

157 · 5 = 785

785 + 785 = 1695

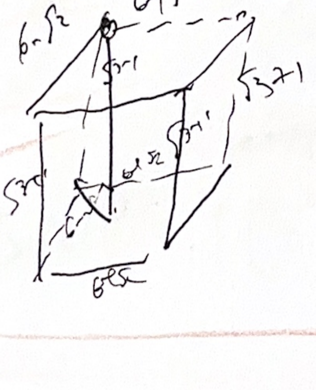
37
+26
59
+21
70
+16
86
+18
104

12 · 16 = 72 · 2 = 192

192 − 27 = 165

144 · 4 = 576

576 · 27 = 4032 + 1152 = 15552



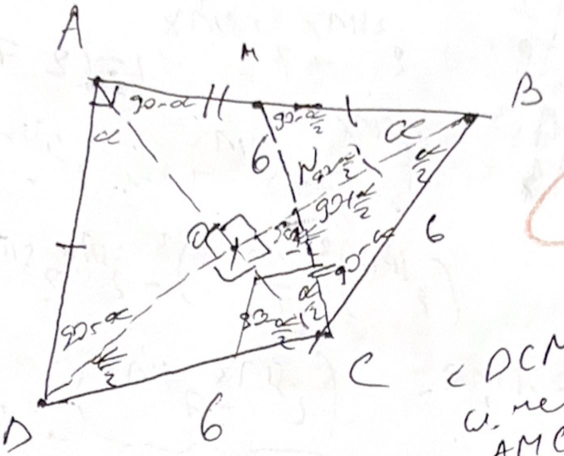
черновик 2

$AM = DN$

$DN^2 = 36 + NC^2$

$AM^2 = 36 + NC^2$

$AM = \sqrt{36 + NC^2}$



$\angle DCM = 90^\circ$

и. неб $AMCD$ = впис

$\frac{OC}{ON} = \frac{DO}{OC} = \frac{6}{NC}$

$\frac{AB}{x} = \frac{OB}{AO} = \frac{AO}{DO}$

$AO = \sqrt{OB \cdot DO}$

$36 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos\alpha$

$AD = x$

$x^2 + (AM + x)^2 = (DN + x)^2$

$36 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha$

$36 = 2x^2(1 - \cos\alpha)$

$18 = x^2(1 - \cos\alpha)$

$AO^2 + OD^2 = x^2$

$OD^2 + (x - AO)^2 = 36$

$OD^2 + x^2 + AO^2 - 2x \cdot AO = 36$

$2x^2 - 2x \cdot AO = 36$

$2x(x - AO) = 36$

$x(x - AO) = 18$

$x^2(1 - \cos\alpha) = x(x - AO)$

$\angle DBC = \frac{\alpha - \alpha}{2}$

$x(1 - \cos\alpha) = x - AO$

$x \cdot DM = 6 \cdot AM + (6 + NC) \cdot x$

$AM = NC = y$

$DM = \sqrt{36 + (6 + NC)^2}$

$DM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6 + y)^2 + 36}$

$x^2 + y^2 = 36 + 12y + y^2 + 36$

$x^2 = 72 + 12y$

$AM = NC = \frac{x^2 - 72}{12} = \frac{x^2}{12} - 6$

черновик 1

$61 \,|\, \frac{1}{9}$

$57 \,|\, 3$

$2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = (2\cdot 7)^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$

$4^{\sin x} + 49^{\sin x} + 1 = 2^{\sin x} \cdot 7^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$

$(2^{\sin x})^2 + (7^{\sin x})^2 - 2^{\sin x} \cdot 7^{\sin x} = 2^{\sin x} + 7^{\sin x} - 1$

$\pi \cdot 100 = 314{,}15\ldots$

$\underbrace{\left(2^{\sin x} - 7^{\sin x}\right)^2}_{\geq 0} = 2^{\sin x} + 7^{\sin x} - 2^{\sin x} \cdot 7^{\sin x} - 1$

$2^{\sin x}(1 - 7^{\sin x})$

$-1 \quad 7^{\sin x} - 1$

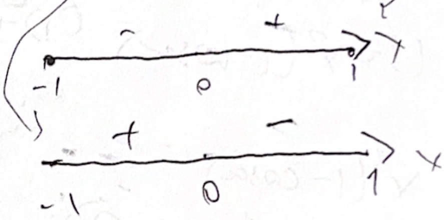
$2^{\sin x} - 7^{\sin x} = 0$

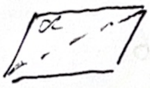
$\sin x = 0$

$x = \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cancel{1 - 7^{\sin}}$

$(1 - 7^{\sin x})(2^{\sin x} - 1)$





$(a+1)(b+1)\cdot \sin\alpha$

$(a+1)(b+1)(c+1)\cdot \sin\alpha$

$\cancel{(a+1)(b+1)(c+1)}$

$x^3 - (10+\sqrt{3})x^2 + (23+10\sqrt{3})x - 23\sqrt{3} = 0$

$a_1 + a_2 + a_3 = 10 + \sqrt{3}$

$ab + ac + bc = 23 + 10\sqrt{3}$

$abc = 23\sqrt{3}$

$c = \sqrt{3}$

$a + b = 10$

$ab = 23$

$10 - a = b$

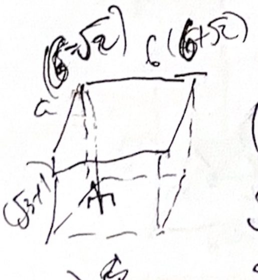
$a(10-a) = 23$

$a^2 - 10a + 23 = 0$

$\frac{10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 23}}{2}$

$= \frac{10 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 5 \pm \sqrt{2}$

$\frac{5-\sqrt{2}}{a}; \frac{5+\sqrt{2}}{b}$



$(6-\sqrt{2})(6+\sqrt{2})$

$\cancel{\sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}}$

$\cancel{\sqrt{2}(3\sqrt{2} - 1)}$

$\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 1)$

$= 36 - 2 = 34 \cdot \sin\alpha$

$\frac{23}{\cdot 4}$
92

$\frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{3}}{\sin\sqrt{3}}$