0 354715 790009

35-47-15-79
(163.1)

12 04
12 ПГ

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 10Е-2

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Батенина Глеба Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«05» апреля 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

35-47-15-79 (163.1)

# Черновик

$$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$$

$3^{\sin x}=a;\quad 5^{\sin x}=b$

$$a^2+b^2+1-ab-a-b=0$$

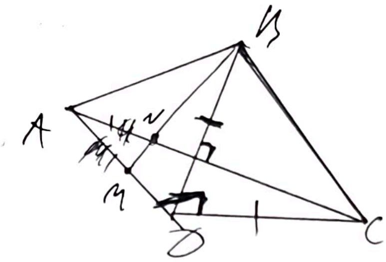
$\cancel{a((a+b)(a-b)^2+1-2ab-a-2b}$

$\cancel{a(a-1)+b}$

$$(a+b)^2+1-3ab-(a+b)=0$$

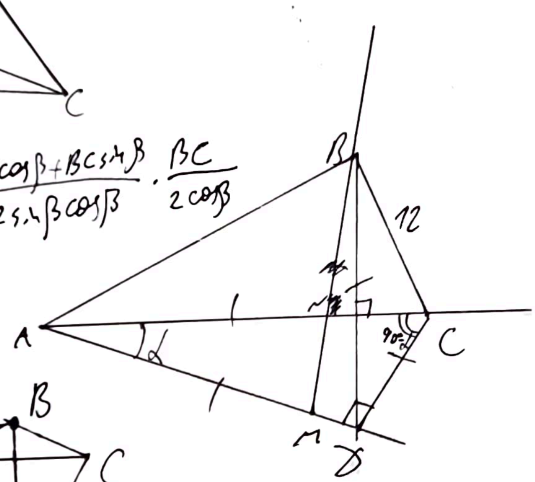
$$(a-b)^2+1+ab-a-b=0$$

$$(a-b)^2+(a-1)(b-1)=0$$




$BC=12$

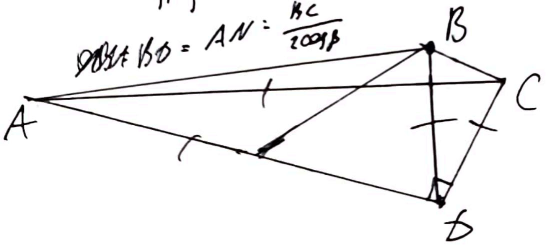
$\Rightarrow \dfrac{2BC\cos\beta+BC\sin\beta}{2\sin\beta\cos\beta}\cdot\dfrac{BC}{2\cos\beta}$

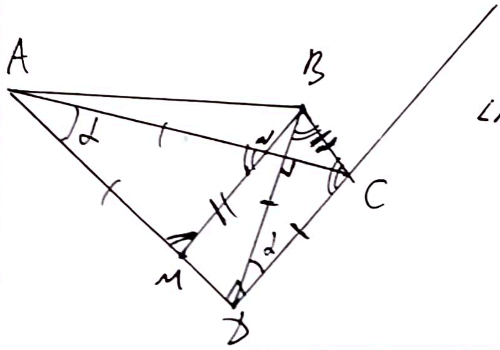



$\cancel{DC=BC\sin\beta}$

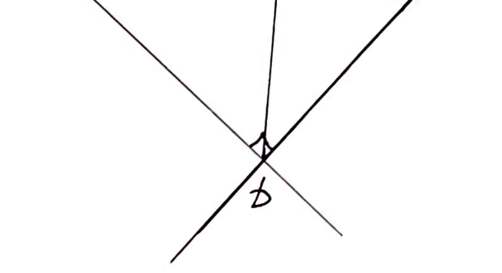
$NC=\dfrac{BC}{\sin\beta};\ NA=\dfrac{BC}{2\cos\beta}$

$\cancel{DM}+BD=AN=\dfrac{BC}{2\cos\beta}$




$\angle MBC=90°$




Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик 1 из 4

№1

$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$

Обозначим $a = 3^{\sin x}$; $b = 5^{\sin x}$. Тогда наше ур-е имеет вид:

$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b \quad | -2ab$

$(a-b)^2 + 1 = a + b - ab$

$(a-b)^2 + 1 + ab - a - b = 0$

$(a-b)^2 + 1 + a(b-1) - b = 0$

$(a-b)^2 + (a-1)(b-1) = 0$

$\forall x$: $(a-b)^2 \geq 0$, т.к. это полный квадрат, а также,
если $x \geq 0$, то $a \geq 1$, $b \geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0$;
если $x < 0$, то $a < 1$, $b < 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) = (\underset{\vee 0}{1-a})(\underset{\vee 0}{1-b}) > 0$.

~~...~~ А сумма двух неотриц. выражений равна 0 только если они оба равны 0:

$\begin{cases} a = b \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \underline{a = b = 1.} \Rightarrow \sin x = 0$

$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

А на отрезке ~~...~~ $[-3{,}15;\ 314]$ ровно 101 точка, кратная $\pi$: от $-\pi > -3{,}15$ до $99\pi$ ~~...~~ $< 314$. $-2\pi$ и $100\pi$ не подойдут, ведь уже $-2\pi < -3{,}15$; $100\pi > 314$.

Ответ: 101.

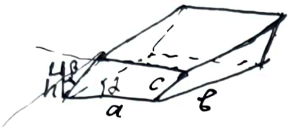
Чистовик 2 и 4

№2

Если $a, b, c$ — корни ур-я $x^3-px^2+qx-r=0$, то по т. Виета: $\begin{cases} a+b+c=p \\ ab+bc+ac=q \\ abc=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=10+\sqrt{2} \\ ab+bc+ac=22+10\sqrt{2} \\ abc=22\sqrt{2} \end{cases}$

Известно, что максимум объёма параллелепипеда с фиксированными сторонами достигается, когда он прямоугольный, ведь $V=S_{осн}\cdot h = ab\sin\alpha\cdot h =$

$= ab\sin\alpha\cdot c\cos\beta \le abc$, если



стороны равны $a, b$ и $c$. А тогда объём нашего параллелепипеда принимает все значения на промежутке $(0;(a+1)(b+1)(c+1)]$, при этом $(a+1)(b+1)(c+1) = abc+ab+bc+b+ac+a+1 =$

$=(abc)+(ab+bc+ac)+(a+b+c)+1 = 22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}+1=$

$=33\sqrt{2}+33.$

Ответ: $V\in(0;\ 33\sqrt{2}+33]$.

№4

Заметим, что $\overline{4a89} = 4089+100a = (11\cdot 371+8)+(9\cdot 11+1)a \underset{11}{\equiv}$

$\underset{11}{\equiv} 8+a$; $\overline{290b} = 2900+b = (\underbrace{2893}_{263\cdot 11}+7)+b \underset{11}{\equiv} 7+b \Rightarrow$

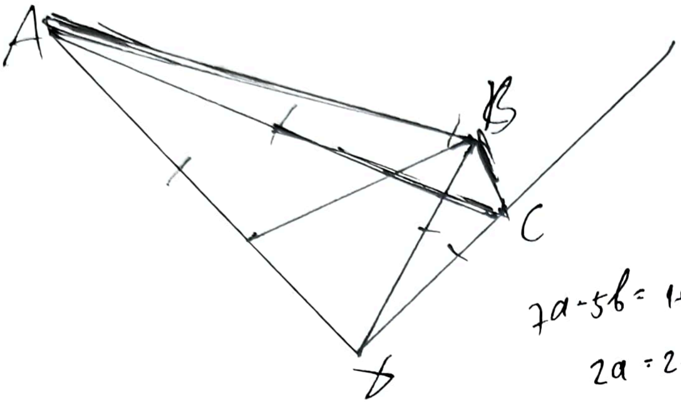
$\Rightarrow \overline{4a89}\cdot\overline{290b} \underset{11}{\equiv} (8+a)(7+b) \underset{11}{\equiv} 1.$

Разобьём все ненулевые остатки $\{1,2,..,10\}$ на пары обратных друг к другу: $1\leftrightarrow 1$; $10\leftrightarrow 10$; $2\leftrightarrow 6$ (т.к. $2\cdot 6\equiv 1$); $3\leftrightarrow 4$; $5\leftrightarrow 9$; $7\leftrightarrow 8$. А теперь переберём все возможные варианты: (учитывая, что $0\le a,b\le 9$)

Черновик

$\Sigma = \frac{20+45}{2}\cdot 26 = 65\cdot 13$

$\Sigma = \frac{2001+2026}{2}\cdot 26 = 4027\cdot 13$




$400 \cdot 11 = 4400$

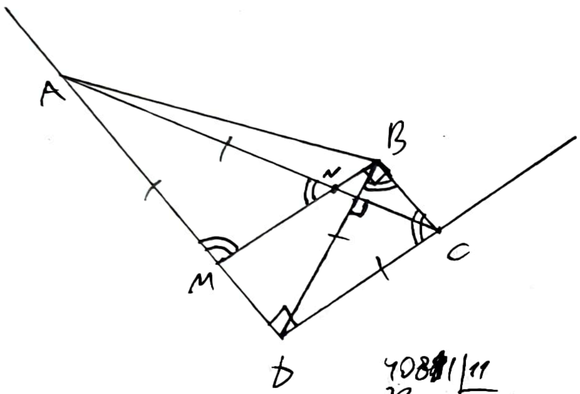
$7a-5b = 1+5a-3b$

$2a = 2b+1$ ⋮̸ $\quad \overline{ab}$ – простое

$(180^\circ - 90^\circ + \beta) - 180^\circ + \beta = 2\beta - 90^\circ$

341

$\overline{4a89}\cdot\overline{290b} \equiv_{11} 1$




$(4089+100a)(2900+b) \equiv$

$\equiv (-311+a)(700+b) \equiv$

$\equiv (30+a)(-70+b) \equiv$

$\equiv (8+a)(7+b) =$

$= 56+7a+8b+ab \equiv$

$\equiv 1+7a+8b+ab \equiv 1$

$\Rightarrow 7a+8b+ab \;\vdots\; 11$

$\overline{ab} = 10a+b$

40881 | 11
33 | 3711
78
11

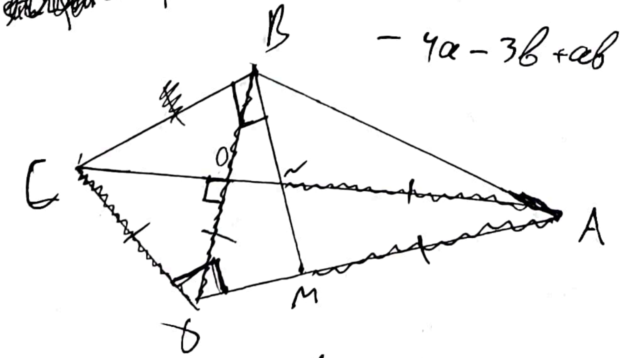
28909 3 | 11
22 | 263
...
33

$\left(\frac{BC}{2\cos\beta}+\frac{BC}{\sin\beta}\right)\cdot\frac{BC}{2\cos\beta} =$

$= \frac{BC^2}{4\cos^2\beta}+\frac{BC^2}{2\sin\beta\cos\beta} =$

~~7a+7ab−3b~~

$-4a-3b+ab$




$a+b^2 \to 150^\circ$

20, 21, ..., 45

$(a,b)\to(5a-3b,\ 7a-5b)$

2001, 2002, ..., 2026

mod 4: $(a,b)\to(a+b,\ -a-b)$

35-47-15-79 (163.1)

# Чистовик з-у 4

$8+a\equiv 1 \Rightarrow \underline{a=4} \Rightarrow 7+b\equiv 1 \Rightarrow \underline{b=5}$; 45 непростое
54 непростое

$8+a\equiv 2 \Rightarrow \underline{a=5} \Rightarrow 7+b\equiv 6 \Rightarrow$ [illegible] $b\equiv -1$ или 10, не подходит

$8+a\equiv 3 \Rightarrow \underline{a=6} \Rightarrow 7+b\equiv 4 \Rightarrow \underline{b=8}$ 68 непростое
86 непростое

$8+a\equiv 4 \Rightarrow \underline{a=7} \Rightarrow 7+b\equiv 3 \Rightarrow \underline{b=7}$ 77 непростое
77 непростое

$8+a\equiv 5 \Rightarrow \underline{a=8} \Rightarrow 7+b\equiv 9 \Rightarrow \underline{b=2}$ 82 непростое
28 непростое

$8+a\equiv 6 \Rightarrow \underline{a=9} \Rightarrow 7+b\equiv 2 \Rightarrow \underline{b=6}$ 96 непростое
69 непростое

$8+a\equiv 7 \Rightarrow a\equiv -1$ или 10 не подходит

$8+a\equiv 8 \Rightarrow \underline{a=0}$ [illegible] не подходит, число ab и ba не двузнач.
$\Rightarrow 7+b\equiv 7 \Rightarrow \underline{b=0}$

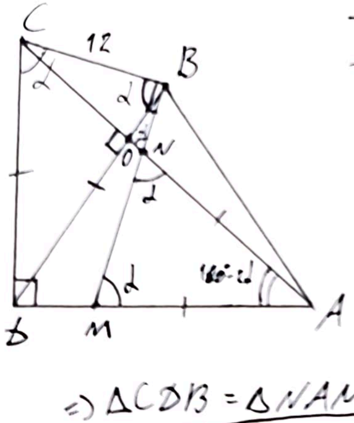
$8+a\equiv 9 \Rightarrow \underline{a=1} \Rightarrow 7+b\equiv 5 \Rightarrow \underline{b=9}$ $\boxed{\text{19 простое}}$, ~~91 простое~~
91 непростое : 7

$8+a\equiv 10 \Rightarrow \underline{a=2} \Rightarrow 7+b\equiv 10 \Rightarrow \underline{b=3}$ $\boxed{\text{23 простое}}$
32 непростое

Ответ: 19 или 23.

~~Ответ: нет.~~
~~Доказательство: заметим, что при замене~~

№3




$\rceil \angle NMA=\alpha$. Тогда $\angle NAM=180^\circ-2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow AC=\dfrac{CD}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\dfrac{CD}{\sin 2\alpha}=\dfrac{CD}{2\sin\alpha\cos\alpha}$;

~~[illegible] провести высоту BH, то~~

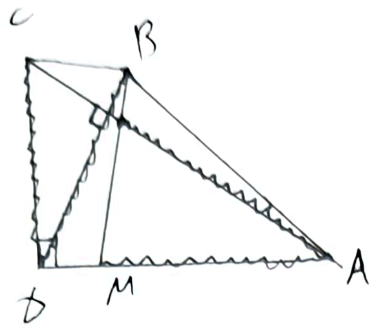
$\angle CDB=90^\circ-\angle BDA=\angle NAM \Rightarrow$

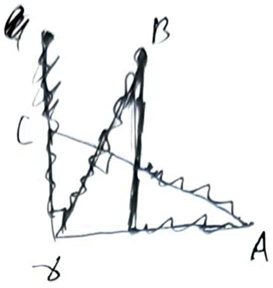
$\Rightarrow \underline{\Delta CDB=\Delta NAM}$, [illegible] а тогда если в $\Delta CDB$ провести выс. и мед. $DH$, то $CD=\dfrac{HC}{\cos\alpha}=\dfrac{BC}{2\cos\alpha} \Rightarrow$

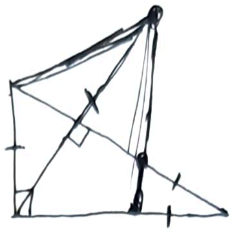

$\Rightarrow \underline{AC=\dfrac{BC}{4\sin\alpha\cos^2\alpha}}$. Но также $\angle DBN=$

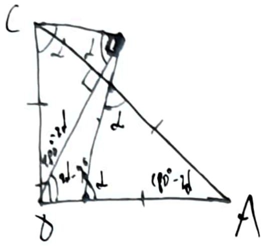
$=90^\circ-\angle CNB=90^\circ-\alpha \Rightarrow \angle CBM=\alpha+90^\circ-\alpha=90^\circ$

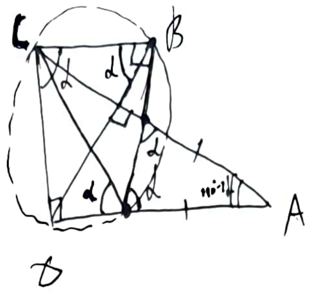
# Черновик






$$\frac{BC}{\sin\beta} + \frac{BC}{2\cos\beta}$$

$$CA = \frac{CD}{\sin\beta}$$

$$BD = CD$$

$$\frac{BC}{\sin\alpha} + \frac{BC}{2\cos\alpha} = \frac{BC}{2\sin 2\alpha\cos\alpha} \qquad CD = \frac{BC}{2\cos\alpha}$$

$$\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{1}{2\sin 2\alpha\cos\alpha} \qquad \frac{BC}{2\sin\beta\cos\alpha}\cdot\frac{BC}{2\cos\alpha} =$$

$$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 \qquad = \frac{BC^2}{4\cos^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)} =$$

$$= \frac{BC^2}{4\cos^2\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Чистовик 4 из 4

$\Rightarrow AC = CN + NA = CN + CD = \frac{BC}{\sin\alpha} + \frac{BC}{2\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{BC}}{4\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\cancel{BC}}{\sin\alpha} + \frac{\cancel{BC}}{2\cos\alpha}$

$\frac{1}{\cancel{4}\,2\sin\alpha\cos^{\cancel{2}}\alpha} = \frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}}$

$1 = 2\cos\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha)$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \quad |:\cos^2\alpha$

$tg^2\alpha + 1 = 4 + 2tg\alpha$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -1 \text{ не может быть,} \end{array}\right.$

т.к. $\alpha$ - острый

Но тогда $S_{ABCD} = \frac{AD\cdot BD}{2} + \frac{CD\cdot BD}{2} =$

$= \frac{BD\cdot AC}{2} = \frac{CD\cdot AC}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{BC}{2\cos\alpha}\cdot\frac{BC}{4\sin\alpha\cos^2\alpha} =$

$= \frac{BC^2}{8\sin\alpha\cos^3\alpha}$

$tg\alpha = 3 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1 = 10 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{10}}$

Дальше подставить и все

$\frac{12^2}{8\cdot\sqrt{\frac{9}{10^4}}} = \frac{3^2\cdot 4^2}{8\cdot\frac{3}{100}} = 6\cdot 100 = 600.$

Ответ: 600.