+1 ~~8~~
+1

0 146480 280003

14-64-80-28
(164.8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Горячёнова Олега Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«05» апреля 2026 года

Подпись участника

 80 (восемьдесят)

14-64-80-28 (164,8)

Черновик | стр. 1|

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}+1=\left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$$

~~Хор~~

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2y}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2y}+1=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\right)^{y}+\left(\frac{1}{2}\right)^{y}+\left(\frac{1}{7}\right)^{y};\quad y=\sin x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2y}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{y}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2y}=\left(\frac{1}{2}\right)^{y}+\left(\frac{1}{7}\right)^{y}-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{y}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{y}-\left(\frac{1}{7}\right)^{y}\right)^{2}=-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{y}-1\right)\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{y}-1\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}=a\;;\;\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}=b$$

$$\cancel{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}=2\cdot\frac{1}{14}^{\sin x}}$$

$$a^2+b^2+1=ab+a+b\quad;a,b>0.$$

$a\overset{?}{=}b\overset{?}{=}1$ ← чабэто

т.е. $\sin x=0$.

$a+b=1$

$b=1-a$

$$a^2+(1-a)^2+1\overset{?}{=}a(1-a)+\cancel{a}+1-\cancel{a}$$

$$a^2+1-2a+a^2+\cancel{1}=a-a^2+\cancel{1}$$

$$-2a+2a^2+1=a-a^2\quad\text{- нет}$$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$\begin{cases}\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab\\ \frac{b^2+1}{2}\geq b\\ \frac{a^2+1}{2}\geq a\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+1\geq ab+a+b$$

Равенство дост.

т.е. $a^2+b^2=2ab$

$b^2+1=2b$

$a^2+1=2a$

$a^2=b^2\rightarrow a=b$

$a=1$

$b=1$

$$\begin{array}{r}12\\+\;12\\\hline 144\end{array}$$

т.е. $a=b=1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}=1$ $\quad\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}=1$

$\sin x=0$ $\quad\sin x=0$

$\sin x=0.$

$x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$ $\quad\pi\approx3{,}1415$, много

$-\pi; 0; \pi;$

$-100\pi; -99\pi; \ldots$

$-100\pi=-314{,}15$ - норм, т.е. $-100\pi; -99\pi; \ldots 0$ 101 реш.

$1440+288=$

$=1640+88=$

$=1648+80=1728$

Черновик стр.2

3 корня: a, b, c.

$(a+1)(b+1)(c+1)$ — ?

$x^3+(7+6\sqrt{5})x=(6+\sqrt{5})x^2+7\sqrt{5}$

V — ?

$V=(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ac+a+b+c+1 =$

$x^3-(6+\sqrt{5})x^2+(7+6\sqrt{5})x-7\sqrt{5}=0.$

По т. Виета

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0.$

$a+b+c=6+\sqrt{5}$

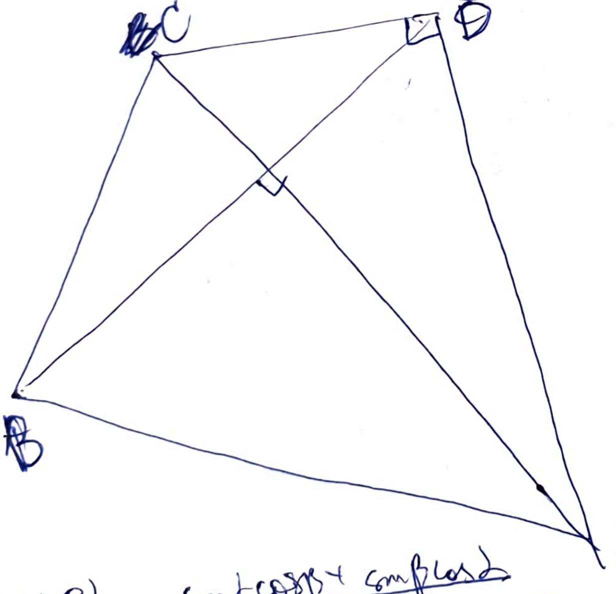
$ab+bc+ac=7+6\sqrt{5}$

$abc=7\sqrt{5}$

$= 7\sqrt{5}+7+6\sqrt{5}+6+\sqrt{5}+1=7\sqrt{5}+6\sqrt{5}+\sqrt{5}+14=14\sqrt{5}+14$

№3

DB=DC



$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

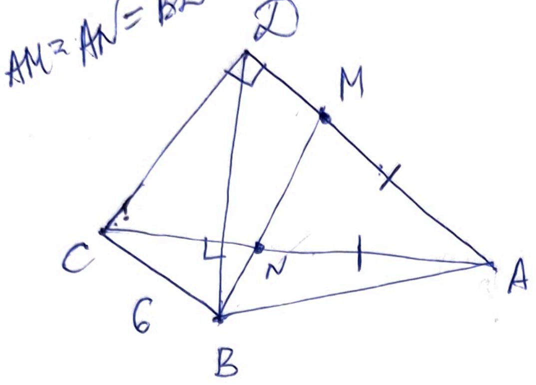
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$AM = AN = BD = DC = x$ Черновик стр. 3

$S_{ABCD} - ?$; $BC = 6$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC$

$AM = AN = BD$



$O = AC \cap BD$

$\angle CDB = 2\alpha = \angle DAC$

~~D – центр опис. окр. △ABC ⇒ D ∈ сер. пер. к AC ⇒ OC = OA~~

$\triangle CDB \sim \triangle MAN$ они равны

$\angle DCO = 90° - 2\alpha$

$\angle BCO = \alpha$

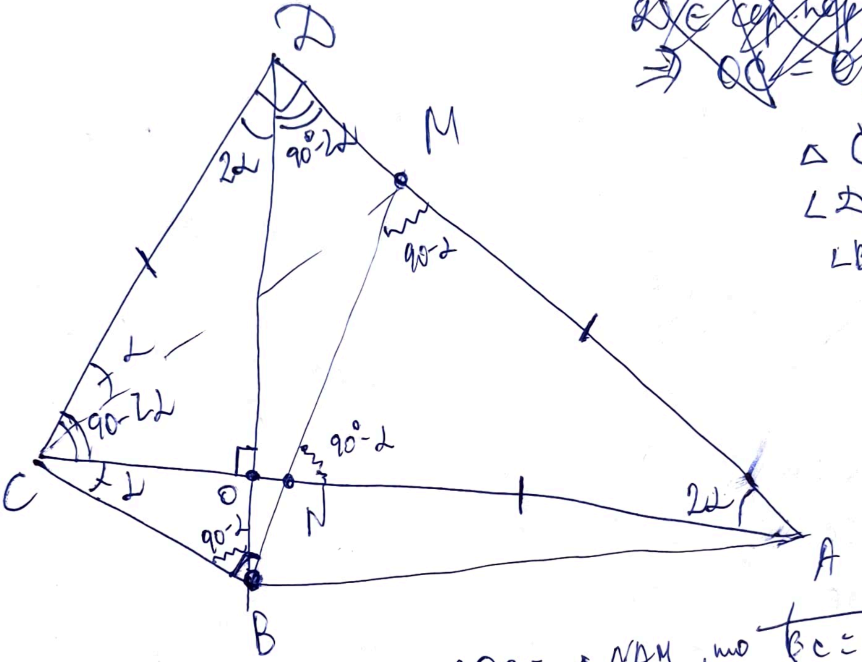
$\angle CBO = 90° - \alpha$

$\angle NMA = 90° - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \square CBMD$ – впис.

$\angle ACD = 90° - 2\alpha = \angle ODA$

т.к. CBMD – впис., то $\angle CBM = 90°$



т.к. $\triangle BDC = \triangle NAM$, то $BC = MN = 6$

$\angle DCO = 90° - 2\alpha$

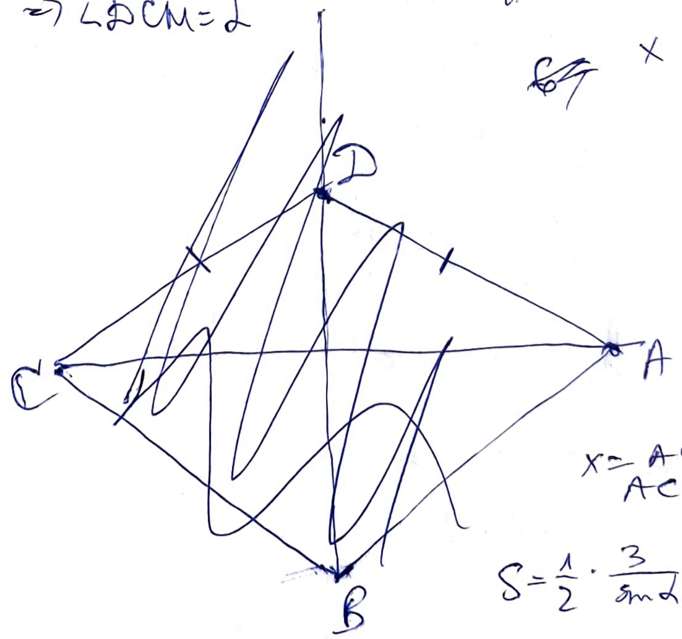
и $\angle BDM = \angle BCM = 90 - 2\alpha \Rightarrow$

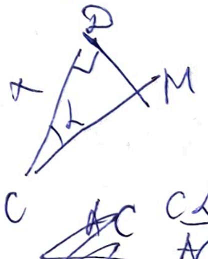
$\Rightarrow \angle DCM = \alpha$

$$\frac{6}{\sin 2\alpha} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{BD}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{x}{\cos\alpha}$$

$\boxed{x = \frac{3}{\sin\alpha}}$

$$x = \frac{6\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{6\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}$$





$\sin\alpha = \frac{DM}{CM}$

$$\frac{CD}{AC} = \sin 2\alpha$$

$$\frac{x}{AC} = \sin 2\alpha$$

$x = AC \cdot \sin 2\alpha$

$$AC = \frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sin\alpha} \cdot \frac{3}{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{9}{2\sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

Черновик | стр. 4

$CM = \frac{6}{\sin 2\alpha}$

$x = \frac{3}{\sin\alpha}$

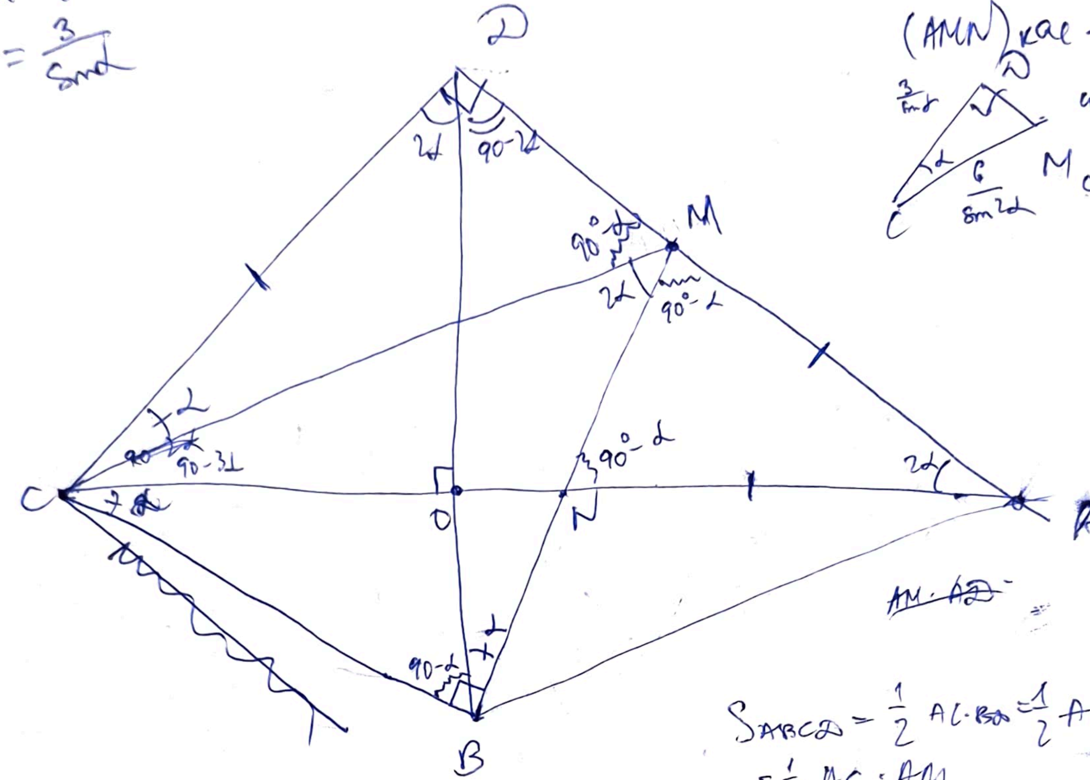
$BC = 6 = MN$

$DC = BD = AN = AM = \frac{3}{\sin\alpha}$

(AMN) кас. CM

$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{\sin\alpha}}{CM}$

$CM = \frac{3}{\sin\alpha\cos\alpha}$



~~AM · AD~~

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot AN = \frac{1}{2} AC \cdot AM$

$CM = CN \cdot CA = CA(CA - x)$

$AC^2 - x \cdot AC - CM = 0.$

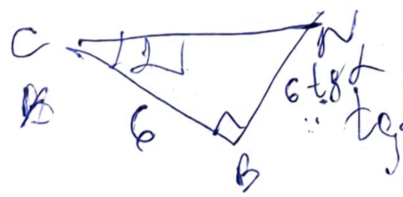
$AC^2 - \frac{3}{\sin\alpha} \cdot AC - \frac{6}{\sin 2\alpha} = 0.$

$D = b^2 - 4ac = \frac{9}{\sin^2\alpha} - \frac{24}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{9}{\sin^2\alpha} - \frac{12}{\sin\alpha\cos\alpha}$

~~AM · AD = AN · AC~~

$\frac{BM}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = 2R = CM = \frac{6}{\sin 2\alpha}$

$\cos 2\alpha$ $\quad 6\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 6\,ctg\,2\alpha$



$tg\,\alpha = \frac{BN}{BC} = \frac{BN}{6}$ $\quad BM =$

$BN = 6\,tg\,\alpha$

$NM = BM - BN = 6\,ctg\,2\alpha - 6\,tg\,\alpha = 6 \quad | : 6$

$ctg\,2\alpha - tg\,\alpha = 1$

$\frac{1}{tg\,2\alpha} = 1 + tg\,\alpha$

$\frac{1 - tg^2\alpha}{2tg\,\alpha} = 1 + tg\,\alpha \qquad | : 1 + tg\,\alpha \neq 0.$

14-64-80-28 (164.8)

Черновик | стр. 5

$\overline{ab}$ – простое

$\overline{1a09} \cdot \overline{683b} \; \vdots \; 11$ ост. 1

$1001 \; \vdots \; 11$

$(1009 + 100a)(6830 + b) \underset{11}{\equiv}$

$\underset{11}{\equiv} (8+a)(230+b) \underset{11}{\equiv} (8+a)(1+b) \underset{11}{\equiv} 1$

$(b+1)(a+8) \underset{11}{\equiv} 1$

$ab + a + 8b + 8 - 1 \; \vdots \; 11$

$ab + a + 8b + 7 \; \vdots \; 11$

$a = 1:$
$b + 1 + 8b + 7 \; \vdots \; 11$
$9b + 8 \; \vdots \; 11$
17, 26, 35, 44
$b = 4$
41

$a = 2:$
$2b + 2 + 8b + 7 \; \vdots \; 11$
$10b + 9 \; \vdots \; 11$
$9 - b \; \vdots \; 11$
$b = 9$
29

$a = 3:$
$3b + 3 + 8b + 7 \; \vdots \; 11$
$11b + 10 \; \vdots \; 11$
$10 \; \vdots \; 11$
нет

$a = 4:$
$4b + 4 + 8b + 7 \; \vdots \; 11$
$12b + 11 \; \vdots \; 11$
$b \; \vdots \; 11$
$b = 0$
~~40 – нет~~
нет.

$a = 5:$
$13b + 12 \; \vdots \; 11$
$2b + 1 \; \vdots \; 11$
$b = 5$
55
нет

$a = 6$
$14b + 13 \; \vdots \; 11$
$3b + 2 \; \vdots \; 11$
$b = 3$
63; 36 нет

$a = 7$
$15b + 14 \; \vdots \; 11$
$4b + 3 \; \vdots \; 11$
$b = 2$
27, 72 – нет

$a = 8$
$16b + 15 \; \vdots \; 11$
$5b + 4 \; \vdots \; 11$
$b = 10$ – нет

$a = 9$
$17b + 16 \; \vdots \; 11$
$6b + 5 \; \vdots \; 11$
$b = 1$
19

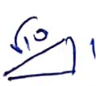
Ответ: 19; 29; 41

$\frac{1 - tg\alpha}{2 tg\alpha} = 1$

$1 - tg\alpha = 2 tg\alpha$

$1 = 3 tg\alpha$

$\boxed{tg\alpha = \frac{1}{3}}$



$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sin 2\alpha} \cdot x =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{\sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha} =$

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{10} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10}} =$

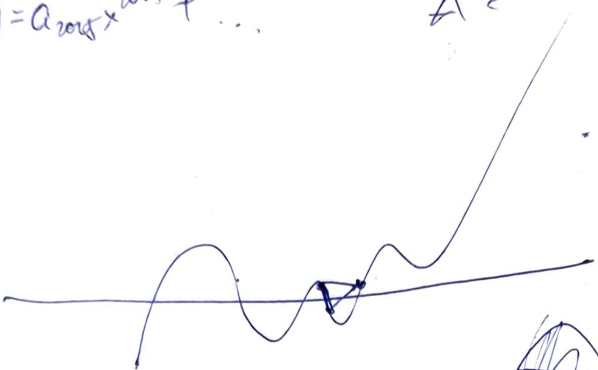
Черновик | стр 6

№6

$f(x) = a_{2015}x^{2015} + \ldots$

$\Delta 1 <$ ст. < 1

...Далее себе...



№3:

$\frac{\cancel{9}^{3}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{10}{\cancel{3}} = \frac{30 \cdot 5}{2} = 15 \cdot 5 = 75.$

№5

Всего 36

Захар

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Макар

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

$\frac{1}{12}\left(\frac{35}{36} + \frac{33}{36} + \frac{30}{36} + \frac{26}{36} + \frac{21}{36} + \frac{15}{36} + \frac{10}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} + \frac{0}{36} + \frac{0}{36}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}(36 + 36 + 36 + 36 + 36) =$

$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\cancel{36}} \cdot \cancel{36} \cdot 5 = \frac{5}{12}$ — вер. выигр. после I хода у Макар

~~Вер. проигр.~~ Вер. ничьи в 1 раунде

$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{36} + \ldots \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12}\left(\frac{36}{36}\right) = \frac{1}{12}$ — А.

Проигр.: $\frac{1}{2}$

I: $\frac{1}{12}$

II: $\frac{1}{12}$

III: $\frac{1}{12}$

$\frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728}$ ← Б.

$12 \times 12 = 144$

$$\begin{array}{r} \times\, 144 \\ 12 \\ \hline +\,288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Чистовик | стр. 6

№4

$\overline{1a09} = 1009 + 100a$

$\overline{683b} = 6830 + \cancel{10b}\, b$

По условию:

$(1009+100a)(6830+b) \underset{11}{\equiv} 1$

$(1009+100a)(6830+b) \underset{11}{\equiv} (8+a)(230+b) \underset{11}{\equiv}$

$\underset{11}{\equiv} (8+a)(10+b) \equiv (b+10)(a+8) \underset{11}{\equiv} (b-1)(a+8) \underset{11}{\equiv} 1$

$(b-1)(a+8) - 1 \,\vdots\, 11$

$\boxed{ab - a + 8b - 8 \,\vdots\, 11}$

$\boxed{\cancel{ab - a + 8b + 3 \,\vdots\, 11}}$

Т.к. a, b — цифры, то $0 \le a, b \le 9$

~~1) $a=1$~~

~~$b - 1 + 8b + 3 \,\vdots\, 11$~~

~~$9b + 2 \,\vdots\, 11$~~

~~$b = 1$ — только это подходит~~

~~11 — простое число~~

~~2) $a = 2$~~

~~$2b - 2 + 8b + 3 \,\vdots\, 11$~~

~~$10b + 1 \,\vdots\, 11$~~

~~Заметим, что $b = 1$ подходит:~~

~~$a \cdot 1 - a + 8 \cdot 1 + 3 = 11 \,\vdots\, 11$ — оно всегда~~

~~делится на 11 вне зависимости от a.~~

~~Д-ем, что другие b не подходят.~~

~~П, есть такое b_2, что при некотором a~~

~~$ab_2 - a + 8b_2 + 3 \,\vdots\, 11$ и $b_2 \ne 1$~~

~~И мы знаем, что $b_1 = 1$ $ab_1 - a + 8b_1 + 3 \,\vdots\, 11$.~~

Чистовик | стр. 7.

№4

~~Такие замет~~

Мы д-ли, что $ab - a + 8b - 8 \vdots 11$

$a(b-1) + 8(b-1) \vdots 11$

$(a+8)(b-1) \vdots 11$ т.к. 11 – простое, то

либо $a+8 \vdots 11$ либо $b-1 \vdots 11$

$a = 3$ или $b = 1$

1) $b = 1$: (т.е. какая-то цифра 1)

11; 13; 17; 19; 31; 41; 61; 71;

2) $a = 3$

13; 23; 43; 53; 73; 83; 31;

37;

13 и 31 повторяются.

Ответ: 11; 13; 17; 19; 31; 41; 61; 71; 23; 43; 53; 73; 83; 37

14-64-80-28 (164.8)

Чистовик | стр. 10

№5

Ничья будет если кол-во очков совпадёт

Т.е. если у М: 12, то и у З: 12

Вероятность: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$

по 11: $\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{36}$

по 10: $\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{36}$

по 9: $\frac{1}{12} \cdot \frac{4}{36}$

по 8: $\frac{1}{12} \cdot \frac{5}{36}$

~~по 10:~~

по 7: $\frac{1}{12} \cdot \frac{6}{36}$

по 6: $\frac{1}{12} \cdot \frac{5}{36}$

по 5: $\frac{1}{12} \cdot \frac{4}{36}$

по 4: $\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{36}$

по 3: $\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{36}$

по 2: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$

по 1: $\frac{1}{12} \cdot \frac{0}{36}$

Вероятность ничьи в одном раунде:

$$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+\frac{0}{36}\right)=\frac{1}{12}\cdot 1=\frac{1}{12}$$

По правилам нашей игры победителя не будет если они 3 раза подряд сыграют в ничью:

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{12^3}=\frac{1}{1728}$$

Победитель не будет не выявлен во всех ост. случаях:

$$1-\frac{1}{1728}=\frac{1727}{1728}$$ ← ответ Б

|Чистовик|стр. 11|

в) Посчитаем вероятность выигрыша Захара

Сначала проанализируем информацию для 1 раунда.

Ничья в одном раунде с вер. $\frac{1}{12}$

Выигр. М, т.е. проигр. Захар., вероятность этого: $\frac{5}{12}$

А значит вероятность выигр. Захара, т.е. проигрыша Макара: $1-\frac{1}{12}-\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$

X_1 — вер. выигр. Захара в I раунде

X_2 — вер. выигр. Захара во II раунде (т.е. в I-ом была ничья)

X_3 — вер. выигр. Захара в III раунде (т.е. в I-ом и II-ом была ничья)

X — вероятность победы в игре.

$X=X_1+X_2+X_3$

$X_1=\frac{1}{2}$; $X_2=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$; $X_3=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$

$X=\frac{1}{2}+\frac{1}{12\cdot2}+\frac{1}{12\cdot12\cdot2}=\frac{144+12+1}{144\cdot2}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик | стр. 12

$x = \frac{157}{288}$

Т.е. вер. выиграть в игре у Захара $\frac{157}{288}$

$\frac{157}{288} > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ вероятность выиграть в игре у Макаре меньше $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вер. того, что Захар выигр. больше, чем того, что Макар выигр.

Ответ: А) $\frac{5}{12}$; Б) $\frac{1727}{1728}$;

В) вероятн. выиграть больше у Захара и она равна $\frac{157}{288}$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик | стр. 8

№5

Распишем ~~все~~ вероятности выпадения каждого ~~о~~ кол-ва очков у Захаря и Макара

у Макара:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

т.к. додекаэдр прав., то все вер. ~~од 1~~ по $\frac{1}{12}$

у Захаря ~~вероятность выпадения~~ ~~числа от 1~~ ~~всех чисел~~ кол-во вариантов выпадения $6 \times 6 = 36$

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
Какими комбинациями	—	11	12 21	13 31 22	14 41 23 32	15 51 24 42 33	16 25 34 43 52, 61	26 35 44 53 62	36 45 54 63	64 55 46	56 65	66

А) Макар выигр. после I хода, если у него выпало больше кол-во очков:

Если у Макара выпало 12, то подходят у Захара от 1 до 11 : вероят. вып. 12 у Макара: $\frac{1}{12}$

вероятность выпадения числа от 1 до 11: $\frac{35}{36}$ $\boxed{\text{Вер}: \frac{1}{12} \cdot \frac{35}{36}}$

Если у М выпало 11, то подходят у Зах от 1 до 10 : Вероятность итоговая: $\boxed{\frac{1}{12} \cdot \frac{33}{36}}$

Если у М выпало 10, то у Зах подходят

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

[Чистовик | стр. 9]

15

от 1 до 9 : вер. итог: $\boxed{\frac{1}{12} \cdot \frac{30}{36}}$

. . . . . . —

Если выпало у М 3, то подходят у Захара числа от 1 до 2, т.е. вер. итог: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$

Если у М 2 выпало, то подходит только 1

Вер. итог: $\frac{1}{12} \cdot \frac{0}{36}$

Вероятность выигрыша Макара:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{35}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{33}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{30}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{26}{36} +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot \frac{21}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{15}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{10}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{36} +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{0}{36} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}(35+33+30+26+21+15+10+6+3+1) =$$

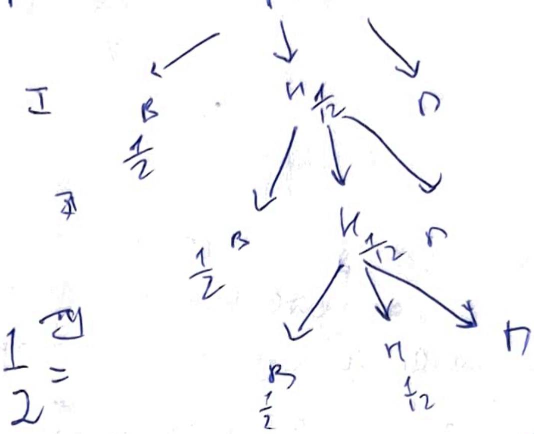
$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}((35+1)+(33+3)+(30+6)+(26+10)+$$

$$+(21+15)) = \frac{1}{12} \cdot \cancel{\frac{1}{36}} \cdot \cancel{36} \cdot 5 = \boxed{\frac{5}{12}}$$ — вероятность, что Макар выиграет уже после I хода

Б) Давайте для начала найдем вероятность ничьи только в одном раунде

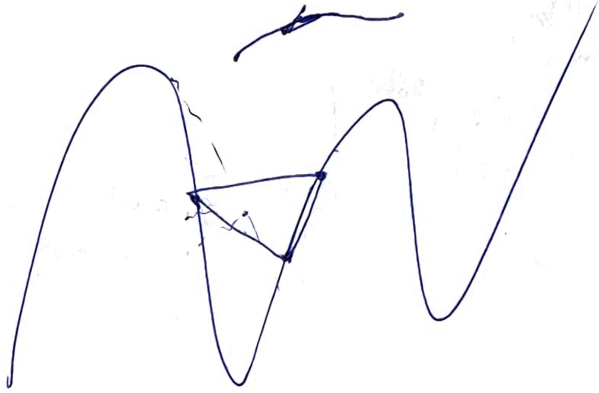
Черновик стр. 7

Больше у Захара



$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{288}=\frac{144}{288}+\frac{1}{288}+\frac{12}{288}=\frac{157}{288}=$ В



$ab_2-a+3b_2+3 \,⋮\, 11$

$ab_1-a+3b_1+3 \,⋮\, 11$

$a(b_2-b_1)+3(b_2-b_1) \,⋮\, 11$

$(a+3)(b_2-b_1) \,⋮\, 11$

$(a+8)(b_2-1) \,⋮\, 11$

$a=3$

$b=1 \quad a=3$

$a(b-1)+3(b-1) \,⋮\, 11$

$(a+3)(b-1) \,⋮\, 11$

Чистовик | стр. 1

№1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}+1=\left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$$

Заметим, что все слагаемые положительные, ($1>0$) и показательные ф-ции положит. Значит нер-во между ср. ар. и ср. геом. можно применять: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}}=\left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}$$

т.е. $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}}{2} \geq \left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+1}{2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}+1}{2} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$$

Сложим эти три нер-ва:

$+$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}+1 \geq \left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$$

А у нас по условию равенство.

т.е. все три нер-ва превр. в равенство

В нер-ве о средних равенство достигается, когда переменные равны, т.е.

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}=\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}=1 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}=1\end{cases} \qquad \begin{cases}2\sin x=0. \\ 2\sin x=0. \\ 2\sin x=0\end{cases} \Rightarrow \sin x=0.$$

Чистовик | стр. 2

$\sin x = 0.$

Подставив в исходное ур-ие убедимся, что это верно

$1+1+1 = 1+1+1$ ✓.

$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$[-315; 3{,}14]$

0 – подходит

А вот $\pi > 3{,}14$, т.к. $\pi = 3{,}1415$

$-101\pi < -315 < -100\pi$ т.к.

~~$-314-3{,}14 < -101\pi < -315 < -100\pi < -314$~~

$-100\pi = -314{,}15\ldots$

~~$-101\pi < -101 \cdot 3{,}14$~~

$\pi > 3{,}14 \quad | \cdot \cancel{(-101)} (x-101)$

$-101\pi < -3{,}14 \cdot 101$

$-101\pi < -314 - 3{,}14$

$-101\pi < -317{,}14 < -315$

Т.е. подходят:

$-100\pi; -99\pi; \ldots -\pi; 0$ – 101 решение

$\boxed{\text{Ответ: 101 решение}}$

№2

$x^3 + (7+6\sqrt{5})x = (6+\sqrt{5})x^2 + 7\sqrt{5}$ Корни: a, b, c

~~По т. Виет~~

$x^3 - (6+\sqrt{5})x^2 + (7+6\sqrt{5})x - 7\sqrt{5} = 0.$

По т. Виета:

$a+b+c = 6+\sqrt{5}$

$ab+bc+ac = 7+6\sqrt{5}$

$abc = 7\sqrt{5}$

Объём равен: $V = (a+1)(b+1)(c+1) =$

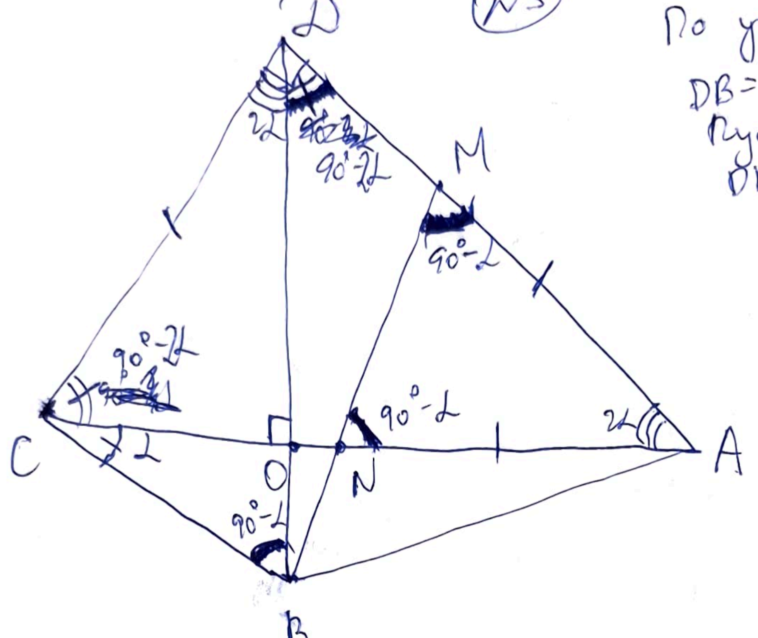
$= abc + (ab+bc+ac) + (a+b+c) + 1 =$

$= 7\sqrt{5} + 7 + 6\sqrt{5} + 6 + \sqrt{5} + 1 = 14 + 14\sqrt{5} = 14(1+\sqrt{5})$

$\boxed{\text{Ответ: } 14(1+\sqrt{5})}$

Чистовик | стр. 3

№3



По условию:
$DB = DC = AM = AN$
Пусть $DB = DC = AM = AN = x$

Пусть AC и BD перес. в (·) O.

Пусть $\angle CDO = 2\alpha$, тогда $\angle OCD = 90^\circ - 2\alpha$; $\angle ODA = 90^\circ - 2\alpha$;

$\angle OAD = 2\alpha$

в $\triangle BCD$: т.к. $BD = CD$ (по усл.), то:

$\angle DCB = \angle DBC = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCO = \angle BCD - \angle OCD = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - 2\alpha) = \alpha$

~~△BCD = △NMA (по~~

Аналогично в $\triangle ANM$: т.к. $AN = AM$ (по усл.), то:

$\angle NMA = \angle MNA = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

$\triangle BCD = \triangle NMA$ ~~(по стороне и двум углам)~~

~~BC~~ (по двум сторонам и углу между ними:

$DC = AM$; $DB = AN$; $\angle BDC = \angle NAM = 2\alpha$) $\Leftarrow$

$\Rightarrow BC = NM = 6$

$\angle DCB = 90^\circ - \alpha = \angle BMA \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ▱ $BCDM$ − впис., т.к. $CDM = 90^\circ$,

то CM − диаметр окр. $(BCDM)$ и $\angle CBM = 90^\circ$

Чистовик | стр. 4

№3

Пусть R – радиус опис. окр. ~~(BCDM)~~ △BCDM

$2R = \frac{BC}{\sin 2\alpha}$ ← по т. Синусов ?

$2R = CM = \frac{6}{\sin 2\alpha}$

По т. Синусов:

$\frac{BM}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = 2R$

$BM = 2R \cdot \sin(90^\circ - 2\alpha) = 2R \cdot \cos 2\alpha = \frac{6}{\sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha =$

$= 6 \cdot ctg 2\alpha$

в △CBN:

$tg \angle BCN = \frac{BN}{CB} = \frac{BN}{6}$

$tg\alpha = \frac{BN}{6} \Rightarrow BN = 6 tg\alpha$

$NM = 6$

$NM + BN = BM$

$6 + 6tg\alpha = 6 \cdot ctg 2\alpha \quad |:6$

$1 + tg\alpha = ctg 2\alpha$

$1 + tg\alpha = \frac{1}{tg 2\alpha}$

$1 + tg\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{2 tg\alpha}$

т.к. 2α – острый угол (~~часть~~ некая часть прямого угла), то α – тоже острый угол $\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha > 0$.

Поделим ур-ие на $1 + tg\alpha \neq 0$.

т.к. $1 + tg\alpha > 1$

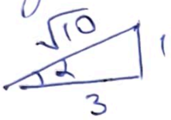
Чистовик | стр. 5

№3

Получим:

$$1 = \frac{1-tg\alpha}{2tg\alpha}$$

$$2tg\alpha = 1 - tg\alpha \Rightarrow 3tg\alpha = 1 \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{3}$$



$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$

~~BD =~~ По т. Синусов

$$\frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R = \frac{6}{\sin 2\alpha}$$

$$BD = \frac{6}{\sin 2\alpha} \cdot \cos\alpha = \frac{6}{2\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}; \quad \boxed{BD = \frac{3}{\sin\alpha}}$$

~~в △ ACD~~: $BD = x = \frac{3}{\sin\alpha} = CD$

в △ACD:

$$\sin\angle CAD = \frac{CD}{AC}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD}{\sin 2\alpha}$$

$$AC = \frac{3}{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha} \cdot \frac{3}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{100}} = \frac{100}{3} \cdot \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{300}{4} = 75$$

$\boxed{\text{Ответ: } 75}$