0 635577 480001

63-55-77-48
(185.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-2

Место проведения г. Пенза
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников покори воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мясиной Дарьи Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

90 (девяносто)

Чистовик

№1

Пусть $a = 3^{\sin x}$, $b = 5^{\sin x}$; $a, b \geq 0$

$a^2+b^2+1 = a\cdot b + a + b \Leftrightarrow 2\cdot a^2 + 2\cdot b^2 + 2 = 2\cdot a\cdot b + 2\cdot a + 2\cdot b \Leftrightarrow$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b = 1$

$3^{\sin x} = 5^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi\cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

$-3{,}15 \leq \pi k \leq 314 \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 99 \Rightarrow$ количество $k = 101$

Ответ: 101

№5

Ничья (X_0): какую бы сумму не выбросила Таня (от 2 до 12) у Ани на 12-ти граннике есть одна подходящая грань с таким же числом.

вероятность ничьи: $X_0 = \frac{1}{12}$

Победа Тани (X_T): чтобы Аня проиграла, её бросок должен быть меньше суммы Тани. Средняя сумма броска 2-х кубиков равна 7, значит, чтобы проиграть Ане в среднем нужно выбросить от 1 до 6 — это половина всех её граней

вероятность победы Тани: $X_T = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

А) Вероятность победы Ани уже после 1 хода:

$X_A = 1 - X_0 - X_T = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

Б) Победитель так и не будет выявлен, если все 3 раунда закончатся в ничью, то есть: $X_0^3 = \left(\frac{1}{12}\right)^3 =$

$= \frac{1}{1728}$

Чистовик: №5 (продолжение)

В) вероятность выиграть больше у Тани, т.к. в каждом раунде $x_Т > x_А$, Таня выиграет матч, если победит в 1 раунде, либо после ~~1 ничьей~~ ничьей, либо после 2-х: $X = x_Т + x_0 \cdot x_Т + x_0^2 \cdot x_Т = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{2} = \frac{144+12+1}{288} = \frac{157}{288}$

№4

По признаку делимости на 11: $\overline{4a89} \equiv 9-8+a-4 \equiv a-3 \pmod{11}$

$\overline{290b} \equiv b-0+9-2 \equiv b+7 \pmod{11}$

по условию произведение этих чисел при делении на 11 даёт остаток 1: $(a-3)\cdot(b+7) \equiv 1 \pmod{11}$

рассмотрим случаи про двузначное число $\overline{ab}$

Поскольку $\overline{ab}$ – простое число, то оно не может оканчиваться на чётную цифру и на 5, следовательно, $b \in \{1, 3, 7, 9\}$, подставим возможные значения b в наше сравнение: если $b=1$: $(a-3)\cdot 8 \equiv 1 \pmod{11}$

умножим обе части на 7 (т.к. $8\cdot 7 = 56 \equiv 1$): $a-3 \equiv 7 \Rightarrow a \equiv 10 \pmod{11}$ не подходит, т.к. a должно быть цифрой от 0 до 9.

Если $b=3$: $(a-3)\cdot 10 \equiv 1 \pmod{11}$, т.к. $10 \equiv -1 \pmod{11}$: $-(a-3) \equiv 1 \Rightarrow a-3 \equiv -1 \Rightarrow a=2$

63-55-77-48 (185.2)

Чистовик №4 (продолж)

Получаем число 23, оно простое $\Rightarrow$ подходит

Если $b=7$: $(a-3)\cdot 14 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (a-3)\cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$

умножим на 4: $a-3 \equiv 4 \Rightarrow a=7$ получаем число 77 оно не простое $(7\cdot 11)$ — не подходит.

Если $b=9$: $(a-3)\cdot 16 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (a-3)\cdot 5 \equiv 1 \pmod{11}$

Умножим на 9: $a-3 \equiv 9 \Rightarrow a \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow$ $a=1$.

Получаем число 19. оно простое — подходит

в этом случае возможны простые числа: 19 и 23, задуманно число $\overline{ba}$ поскольку $\overline{ba}$ простое $\Rightarrow$ последняя цифра $a \in \{1;3;7;9\}$

подставляем в то же уравнение: $(a-3)\cdot(b+7) \equiv 1 \pmod{11}$

: если $a=1$ $(-2)\cdot(b+7) \equiv 1 \pmod{11}$ умножим на 5 тк $-10 \equiv 1$: $b+7 \equiv 5 \Rightarrow b \equiv -2 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow$ $b=9$. получаем $\overline{ba}=91$. Оно не ~~простое~~ простое ($7\cdot 13$ — не подходит.), если $a=3$: $0\cdot(b+7) \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 0 \equiv 1 \pmod{11}$. решений нет

если $a=7$: $4\cdot(b+7) \equiv 1 \pmod{11}$

умножим на 3 $b+7 \equiv 3 \Rightarrow b \equiv -4 \equiv 7 \pmod{11}$ $\Rightarrow b=7$ получаем число 77 не простое $\Rightarrow$ не подходит, если $a=9$: $6\cdot(b+7) \equiv 1 \pmod{11}$

умножим на 2: $b+7 \equiv 2 \Rightarrow b \equiv -5 \equiv 6 \pmod{11}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

черновик
~~Следовательно~~ получаем число 69 №4 (продолжение) не простое ($3 \cdot 23$) — не подходят в этом случае подходящих простых чисел ~~нет~~ нет

Ответ: 19 и 23.

№3

$AM = AN = BD$, $BD = DC$; пусть $O = AC \cap BD$, пусть H — основ-е высоты из M на AC

1) $AM = BD = DC$

пусть $\angle DAC = \alpha$, тогда из $\triangle CDA$ $\angle DCA = 90^\circ - \alpha$, а из $\triangle CDO$ $\angle CDO = \alpha \Rightarrow \triangle AMH = \triangle CDO$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow AH = DO$; $MH = CO$.

2) $HN = AH - AH = \overset{AN}{\cancel{AA}} - \cancel{DO}$

$OB = BD - DO = AN - DO$ $(BD = A\overset{N}{\cancel{D}}) \Rightarrow HN = OB$

$\begin{cases} MH \perp AC \\ BO \perp AC \end{cases} \Rightarrow MH \parallel BO \Rightarrow \triangle MHN \sim \triangle BON$ (по 2-м углам)

$$\Rightarrow \frac{ON}{HN} = \frac{OB}{\cancel{M}MH} \overset{\overset{NH}{\cancel{AH}} = OB \quad MH = CO}{\Longleftrightarrow} OB^2 = ON \cdot CO \ (*)$$

пусть $DO = h$, $CO = x$, а $\underline{M = a}$, тогда $OB = \overset{a}{\cancel{A}} - h$,

DO - высота в $\triangle ADC \Rightarrow \frac{AO}{\cancel{AO}} = \cancel{\frac{h}{x}}\ \frac{h^2}{x}$

$ON = AO - AN = \frac{h^2}{x} - \cancel{B}a$

$(*)$ $(a-h)^2 = \left(\frac{h^2 \cancel{x}}{x} - a\right) \cdot \overset{x}{\cancel{x}} \Leftrightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot h = -a \cdot x$

$\Rightarrow x = 2 \cdot h - a$

чистовик (продолжение)

по теореме Пифагора в △ BCO

$h^2+x^2=a^2 \Leftrightarrow h^2(2\cdot h-a)^2=a^2 \Leftrightarrow 5\cdot h^2-4\cdot a\cdot h=0$

$\Rightarrow h=\frac{4}{5}\cdot a$

$x=2\cdot\frac{4}{5}\cdot a-a=\frac{3}{5}a$, в △ BOC по теореме Пифа- ~~гора~~ гора: $OB^2+CO^2=h^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\cdot a\right)^2+\left(\frac{3}{5}\cdot a\right)^2=$

$144 \Leftrightarrow \frac{10}{25}\cdot a^2=144 \Leftrightarrow a^2=360 \Leftrightarrow a=\cancel{8}6\cdot\sqrt{10}$

$AC=AO+CO=\frac{h^2}{\cancel{a}\,x}+x=\frac{160a^2}{25}:\frac{3a}{5}+\frac{3a}{5}=\frac{5}{3}\cdot a$

$S(ABCD)=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}a\cdot a=\frac{5}{6}\cdot a^2=\frac{5}{6}\cdot 360=$

300

Ответ: 300.

№2.

$P(x)=x^3-(\cancel{2}10+\sqrt{2})\cdot x^2+(22+10\cdot\sqrt{2})\cdot x-22\cdot\sqrt{2}=0$.

заметим, что $x=\sqrt{2}$ корень: $P(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3-$
$(10+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^2+(22+10\cdot\sqrt{2})\sqrt{2}-22\cdot\sqrt{2}=$
$2\sqrt{2}-20-2\sqrt{2}+22\cdot\sqrt{2}+20-22\cdot\sqrt{2}=0$.

по теореме Безу:

$x^3-(10+\sqrt{2})\cdot x^2+(22+10\sqrt{2})\cdot-22\sqrt{2}$ | $x-\sqrt{2}$

$x^3-\sqrt{2}\cdot x^2$ | $x^2-10x+22$

$\cancel{x^2}$
$-10x^2+(22+10\cdot\sqrt{2})\cdot x$
$-10x^2+10\cdot\sqrt{2}\cdot x$

Черновик №2 (продолжение)

$22x - 22\cdot\sqrt{2}$

$22x - 22\sqrt{2}$

0.

$x^2 - 10x + 22 = 0.$

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{3}$. тк $\sqrt{2} > 0$ и $5 \pm \sqrt{3} > 0$, $a+1 > 1$, $b+1 > 1$, $c+1 > 1$, поэтому такой параллелепипед существует

V любого параллелепипеда не больше произведения длин его рёбер. максимум для произволь-ого параллелепипеда и равен $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$

по теореме Виета $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, отсюда: $-P(-1) = -(-1-a)\cdot(-1-b)(-1-c) = (a+1)(b+1)(c+1)$

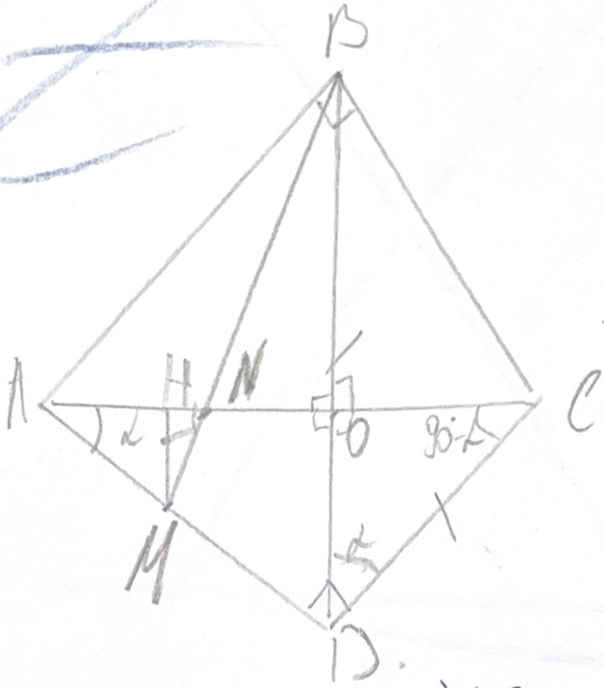
$P(-1) = (-1)^3 - 1(10+\sqrt{2})(-1)^2 (22+10\cdot\sqrt{2})\cdot(-1)(-22\cdot\sqrt{2}) = -1 - 10 - \sqrt{2} - 22 - 10\cdot\sqrt{2} - 22\cdot\sqrt{2} = -33 - 33\cdot\sqrt{2}$

и максимальный объём равен $33 + 33\sqrt{2}$. тк углы между рёбрами не зафиксированы, то объём зависит от них и может принимать любые значения и

Больше числовых максимума и положительные

Ответ: $t \in (0, 33+33\sqrt{2}]$

№3 (рисунок)



~~№6~~

Черновик

$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$

$x \in [-3,15; 3,14]$

$3^{\sin x}+5^{\sin x}=15^{\sin x}-1^{x}$

$(2\sin x-\sin x-\sin x)$

$3^{\sin x}-15^{\sin x}+5^{\sin x}=-1^{x}$

№2