



87-51-67-57
(161.1)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант _____

Место проведения город Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьевы горы!"
наименование олимпиады

по м а т е м а т и к е
профиль олимпиады

Шеленова Александра Валерьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

Шеленова

Handwritten signature

87-51-67-57
(161.1)

$$(a-b)(3a-b) = \frac{35a^2}{n} - \frac{7ab}{n+1} + 5b^2$$

~~$$5n - 3n - 3 \quad 2n - 3$$~~

~~$$7n - 5n - 5 \quad 2n - 5$$~~

$$t_1 = 9:15 \leftrightarrow 10:30 = 75 \text{ мин}$$

$$t_2 = 10:15 \leftrightarrow 10:30 = 15 \text{ мин}$$

$$S_1 = S_2 \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{matrix} \quad \parallel \quad b = a + k$$

$$\Downarrow \quad \begin{matrix} 4 & 3+2+9 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

~~$$v_1 = \frac{1}{5} v_2$$~~

$$\begin{matrix} 12a - 8b & 2b \\ a + b & 5a - 3a - 3k \\ 11a - 9b & 7a - 5a - 5k \end{matrix}$$

$$2000 - 14 = 1986$$

$$= 1986 - 100$$

$$\begin{matrix} 8 - 1000 & 2a \\ 5a - 3b & 16 - 10000 & a - 2b \\ 7a - 5b & 32 - 100000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 64 - 1000000 & & & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \end{matrix}$$

Черновик 1

N1

Если пешеход вышел в 9:15, а велосипедист - в 10:15, то разность выезда из пункта А у них в час в 10:30, т.е. ещё через 15 мин ($\frac{1}{4}$ ч) велосипедист достиг пешехода. подсчитаем время в пути:

$$t_{\text{пеш}} = 1ч + \frac{1}{4}ч = \frac{5}{4}ч$$

$$t_{\text{вел}} = \frac{1}{4}ч$$

$$\underbrace{S_{\text{пеш}} = S_{\text{вел}}}_{S'' \Downarrow} \quad \left(\begin{array}{l} \text{т.к. велосипедист} \\ \text{догнал пешехода,} \\ \text{выехав из того же пункта} \end{array} \right)$$

Знаем, что $v = \frac{S}{t}$

$$v_{\text{пеш}} \Downarrow = \frac{S}{\frac{5}{4}} = \frac{4S}{5} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$v_{\text{вел}} = \frac{S}{\frac{1}{4}} = 4S \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$\text{Отсюда } \Downarrow v_{\text{вел}} = \frac{4S v_{\text{пеш}}}{\frac{4S}{5}} = 5v_{\text{пеш}}$$

Тогда если мы хотим, чтобы встреча произошла в 10:00, т.е. через 45 мин ($\frac{3}{4}$ ч) после начала движения пешехода, то ~~то~~ если $v_{\text{вел}} = 5v_{\text{пеш}} \Rightarrow t_{\text{пеш}} = 5t_{\text{вел}}$ (~~то~~ при учёте $t = \frac{S}{v}$). $\frac{45 \text{ мин}}{5} = 9 \text{ мин.} \Rightarrow$ велосипедист выедет из А в 9:51.

Ответ: 9:51

Чистовик 1

87-51-67-57
(161.1)

\mathbb{N}_2

\mathbb{P} - множество простых чисел
 $4001 \in \mathbb{P}$ Найми: n , что

$$n(n+4001) = y^2$$



П.к. $n+4001 > n$, то $n+4001$ не может $\in \mathbb{P}$ (м.к. тогда $y^2 = (n+4001)^2$, что больше $n(n+4001)$).

Предположим, что $n \not\equiv 4001$. П.к. $4001 \in \mathbb{P}$, то для всех делителей $n \neq (d_i)$ будем иметь $4001 \equiv r \pmod{d_i}$, где r - ненуль. ост. Отсюда $\text{НОД}(n, n+4001) = 1$. Тогда n обязательно квадрат (k^2) и $n+4001$ тоже (ведь если квадрат (y^2) делится на квадрат (k^2) то тоже полуж. квадрат).

Зная, что $n \in \mathbb{Z}$ и что $n+4001 > n$, представим $n+4001$ как $(k+m)^2$ (если $n = k^2$):

$$\begin{aligned} (k+m)^2 &= k^2 + 2km + m^2 \text{ (по формуле)} \\ &= n + 2km + m^2 \Rightarrow 4001 = 2km + m^2 \\ &= m(2k+m). \end{aligned}$$

П.к. 4001 : только 4001 и 1 , то $m = 4001, 1$:

$m=1$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (2k+1) &= 4001 \\ 2k &= 4000 \\ k &= 2000 \\ n &= 2100000 \end{aligned}$$

$m=4001$

$$\begin{aligned} 4001(4001+2k) &= 4001 \\ 4001+2k &= 1 \\ 2k &= -4000 \\ k &= -2000 \\ n &= 4000000 \end{aligned}$$

Ответ: $n = \{2100000\}$

См. продолж. на Числовике 3 Числовик 2

$\sqrt{2}$ (прод.)

Таким образом, в случае, где $n \neq 4001$, единств. вар. $n = 4000000$.

Рассм. случай, где $n = 4001$.

Тогда n представим как $4001m$.

~~...~~ \Downarrow

$$4001m(4001m + 4001) = 4001m(4001(m+1))$$

$$= 4001^2 \cdot (m(m+1))$$

Отсюда $m(m+1)$ — квадрат.
но вспомним, что $\text{НОД}(m, m+1) = 1$,
т.к. если $m \equiv 0 \pmod{d_j}$,
то $m+1 \equiv 0+1 \equiv 1 \pmod{d_j}$, т.е. $m+1 \not\equiv 0 \pmod{d_j}$.

Тогда и m , и $m+1$ должны быть квадратами;

$$m = l^2$$

$$m+1 = (l+h)^2 = l^2 + 2lh + h^2 =$$

$$= m + 2lh + h^2 = m + h(2l+h)$$

тогда $h(2l+h) = 1$ и т.к. у нас
для натур. квадратов нужны $l, h \in \mathbb{Z}$,
то $h = 1$, отсюда $2l = 0$. Но тогда
и $n = 0$, чего не может быть ($0 \notin \mathbb{N}$)

\Downarrow

Итого, разобрав все случаи,
стало понятно, что подходит
лишь $n = 4000000$.

Ответ: $n = \{4000000\}$

Числовик 3

87-51-67-57
(161.1)

№ 3

Известно, что $26! = \overbrace{40329416112660563550}^{a,b,c,d}$
так же a, b, c, d необяз. различные
цифры

↓
произведение натур.
 $26!$ кратно всех числам до 26
~~5, 10, 15, 20, 25 и др.~~

Ну, среди них 5 чисел : 5 (5, 10, 15, 20, 25)
а 25 это 5^2 , т.е. $26! : 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$.

т.к. четных среди них много (2, 4, 6, 8, 10)
то $26!$ точно $: 2^6$

↓
 $26! : 2^6 \cdot 5^6 = 10^6$, т.е. оканч. 6
нулями. Отсюда $c, d = 0$.

Посмотрим по mod 9, 11:

$$26! \equiv \sum_{\text{циф}} \equiv 6 + a + b \equiv 0 \pmod{9}$$

$$26! \equiv \sum_{\text{неч. циф.}} - \sum_{\text{чет. циф.}} \equiv 9 - a + b \equiv 0 \pmod{11}$$

$$6 + a + b : 9 \Rightarrow a + b \equiv 3 \pmod{9}$$

$$9 - a + b : 11 \Rightarrow b - a \equiv 2 \pmod{11}$$

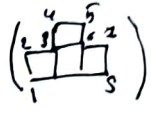
↓
 $a + b = 3, 12$ ($21 > 9 + 9$)




$3 = 0 + 3, 1 + 2$
 $0 \neq 3 \neq 8 \neq 2$ $1 - 2 \equiv 10 \neq 2$
 $3 - 0 \equiv 3 \equiv 2$ $2 - 1 \equiv 1 \neq 2$
т.е. $a + b = 12$
м.к. $b - a \equiv 2$ и
не более $9 - 3 = 6$, т.о.
 $b - a = 2$
возм. $a + b = 12$

Ответ: $c, d = 0$ $a = 5, b = 7$ $b = 7 = 2 + a + a = 2 + 2 \cdot 5 = 12$ Числовик 4

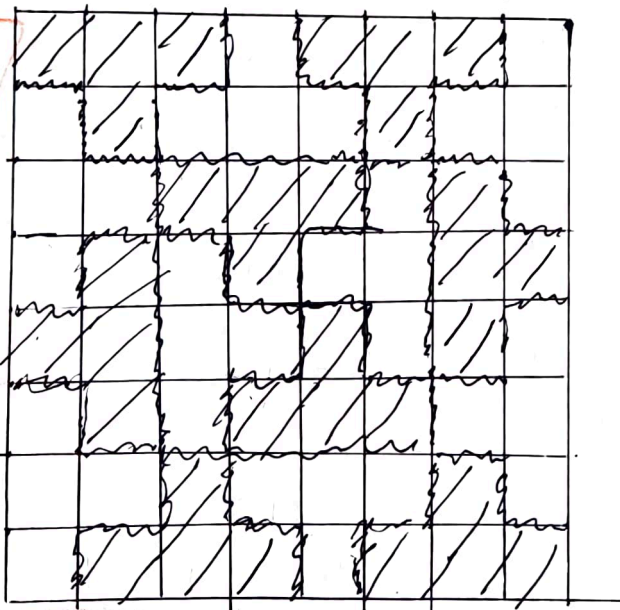
№ 5

III.к. разрежем 8-угол по границам клеток, тогда клетками. Заметим, что минимальный по размеру ~~клетки~~ клетчатый восьми-

угольник состоит из 4 клеток ,

т.к. из 1 клетки ничего не сделаем, это квадрат, из 2 клеток единств. фигура -  - прямоугол. Из 3 клеток можно сделать только  (прямоугол.) и  (шестигол.)

III.е. по границам клеток разрежем мин. 8-угол. состоит из 4 клеток, т.е. ~~можно~~ можно разрезать доску 8x8 кв. не более чем на $\frac{8 \cdot 8}{4} = 16$ фигур. Соответственно, пример на 16 в наличии;



mm - линии разрезов

Ответ: 16 фигур

Чистовик 5

№4

Нужно понять, можно ли из
 $15, 16, \dots$, а 0 получить $2001, 2002, \dots$
 $\dots, 2026$, заменяя a и b на $5a - 3b$

и $7a - 5b$. Ну, док-жем, что
 кол-во чисел, $\div 5$, не уменьш.:

1. Если a и $b \div 5$, то разумеется
 кратных 5 меньше не станет

2. Если $a \div 5, b \div 5$, то в результа-
 те $7a - 5b \div 5$, кратных
 5 меньше не станет

3. Если $a \div 5, b \div 5$, то в рез.
 $5a - 3b \div 5$, кратных 5 меньше
 не станет

4. Если a и $b \div 5$, то и
 $7a - 5b$, и $5a - 3b$ будут
 $\div 5$, меньше $\div 5$ не станет.

Тогда заметим, что изначально
 в чисел $\div 5$ ($25, 30, 35, 40, 15, 20$),
 но в конце их должно быть 5
 ($2005, 2010, 2015, 2020, 2025$). Такого
 быть не может.

Ответ: нет,
 док-ка

Учитель Б

№ 6

49 волонтеров с одинак.
производит (мг-единица
мусора, $k \frac{M_y}{y}$)

I гр.

II гр.

C_1 - собрала I гр.

C_2 - собрала II гр.

$t_{об}$ - время на обес
 $t_{рад}$ - время в ко-
торое работают

$C_1 = C_2$ $t_{об} m_1 = t_{об} m_2 + k$
(I гр. на час позже закончила)

$t_{рад1} = t_{об} m_1 - t_{об} \quad k \leq t_{об} \leq 1 \frac{1}{3} k$

$t_{рад2} = t_{об} m_2 - t_{об} \quad \neq t_{об} m_1 - t_{об} \neq k$

$C = t_{рад}$

$n + m = 49$

$t_{рад1} \cdot n \cdot k \frac{M_y}{y} = t_{рад2} \cdot m \cdot k \frac{M_y}{y}$

$t_{об} m_1 \cdot n \cdot k \frac{M_y}{y} = 1 \frac{3}{4} \cdot t_{рад2} \cdot m \cdot k \frac{M_y}{y}$

$t_{об} = \frac{3 \cdot t_{рад2} \cdot m}{4 \cdot n}$

$1 \frac{2}{3} \cdot t_{рад1} \cdot n \cdot k \frac{M_y}{y} = t_{об} m_2 \cdot m \cdot k \frac{M_y}{y}$

$t_{об} = \frac{2}{3} \cdot t_{рад1} \cdot \frac{n}{m}$

См. продолжение
на Чистовике 8

Ответ:

Чистовик 7

7

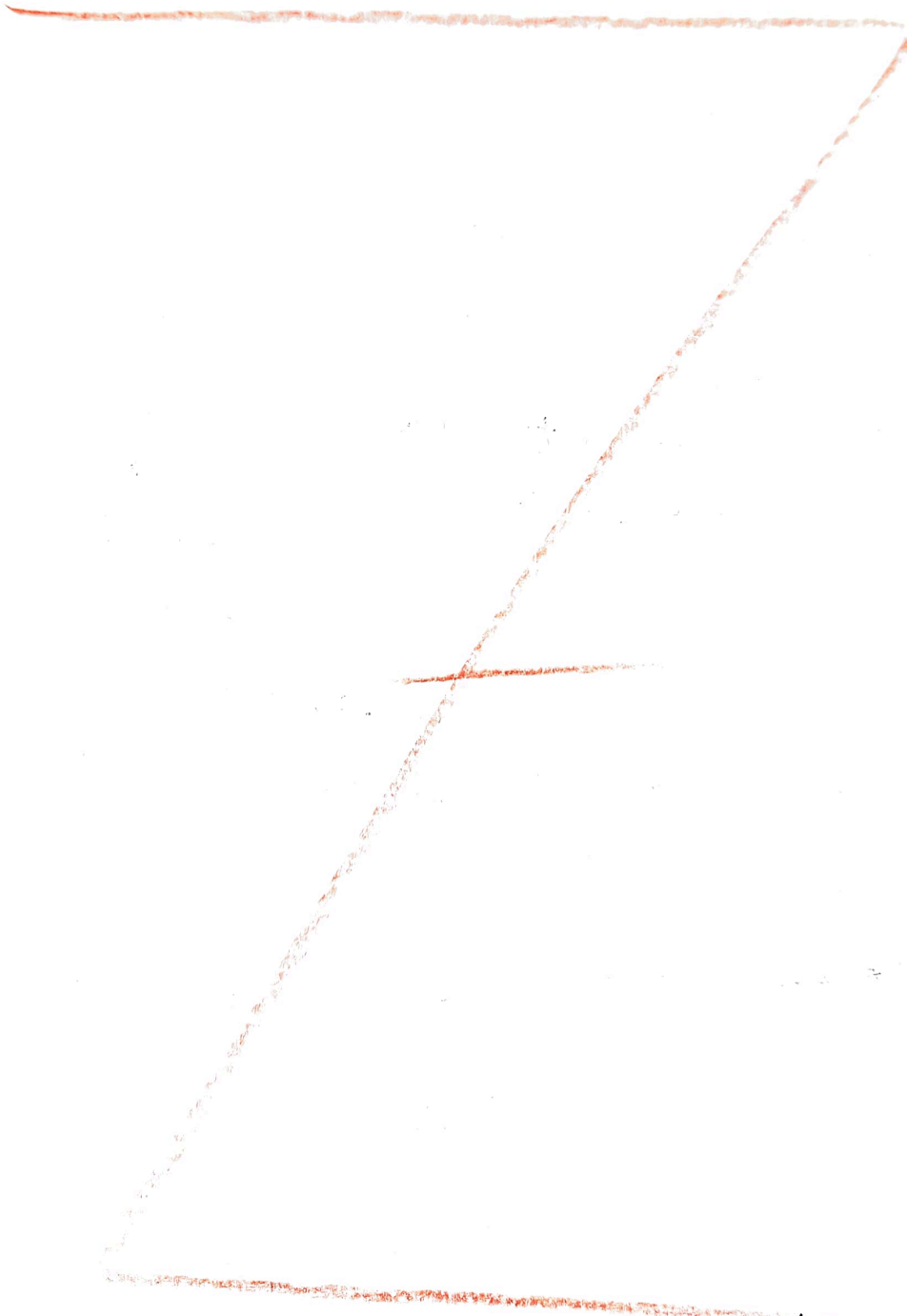
№6 (прод.)

Состав., исходя из вычисл., поставим
знак. $t_{об1}$ и $t_{об2}$ в $t_{рад1} = \dots$;

$$t_{рад2} = t_{об2} - \frac{2}{3} t_{рад1} = t_{об2} - \frac{2}{3} t_{рад2} \cdot \frac{m}{h}$$

$$= t_{об2}$$

$$t_{рад1} = t_{об2} - \frac{3}{4} t_{рад2} \cdot \frac{m}{h}$$



Чистовик 8