0 507801 110001

50-78-01-11
(164.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е – 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Султанова Кирилла Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

95 (девяносто пять)

50-78-01-11 (164.5)

ЧЕРНОВИК 1

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ac) - abc$

$\begin{cases} \cancel{\alpha = -(a+b+c)} \end{cases}$ $\begin{cases} a = -(x_1+x_2+x_3) \\ b = x_1 x_2 \end{cases}$

пусть $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = a$

$\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = b$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = 0$

$\cancel{a(a-b) + b(b}$

$a^2 + b^2 - ab = a + b + 1 \quad | -ab$

$(a-b)^2 = a + b - ab + 1$

$(a-b)^2 = \cancel{(1-a)(1-b)}$

$\cancel{(a-1)(1-b)}$

$\cancel{a - ab - 1 + b}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = d$

$\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = s$

$d^2 + s^2 + 1 = ds + d + s$

$d^2 + s^2 + 1 \geq 2ds + 1$

если док-ть, что ...

$2ds + 1 \geq ds + d + s \geq 0, \ldots$

$ds + 1 \geq d + s.$

$ds - d - s + 1 \vee 0$

$(d-1)(s-1) \vee 0$

$\left(\frac{1}{2}^{\sin x} - \frac{1}{2}\right)$

$\sin^2 x \geq 0$

$\Rightarrow$ только

при

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = a$

$\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = b$

$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b$

пусть $a + b = x$
$ab = y$

$(a^b)^c = a^{bc}$

$\Rightarrow x^2 - 2y + 1 - y - x = 0.$

$\cancel{x^2 - x + 1 - 3y = 0}$

$\cancel{3ab}$

$\underbrace{a^2 + b^2}_{\geq 2ab} + 1 = ab + a + b$

$ab + a + b \geq 2ab + 1$

$a + b \geq ab + 1.$

$ab - a - b + 1 \leq 0$

$(a-1)(b-1) \leq 0.$

$a \in [\ldots]$

$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$(a+b)^2 - 2ab + 1 = ab + (a+b)$

$\cancel{x^2 - 2y + 1 = x + y}$

$x^2 - 2y + 1 = x + y$

$\cancel{x^2 - x + 1 = 3y}.$

$\cancel{a^2} + a^2 + 1 = \cancel{a^2} + 2a$

$a^2 - 2a + 1 = 0$

$a = 1$

-11π

$3,14 < \pi < 3,15$

$101 \times 3,14 = 404$

101×303

$317,14$

ЧИСТОВИК (1)

№1) Пусть $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = a$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = b$ => Получим:

$$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$$

Оценим левую часть: $a^2+b^2+1 \geq 2ab+1$ (по нер-ву о средних) (т.к. $a^2, b^2 > 0$. $a, b \neq 0$, т.к. это степ. функция)

~~Если докажем, что: $2ab+1 \geq ab+a+b$, то получим, что равенство выполняется тогда и только тогда, когда~~

Сравним $2ab+1 \vee ab+a+b$

$ab - a - b + 1 \vee 0$

$(a-1)(b-1) \vee 0$

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - 1\right)\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} - 1\right) \vee 0$

рационализация:

$(\sin x - 0)(\sin x - 0) \vee 0$

$$\sin^2 x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+1 \geq 2ab+1 \\ ab+a+b \leq 2ab+1 \\ a^2+b^2+1 = ab+a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+1 = 2ab+1 \\ ab+a+b = 2ab+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ ab - a - b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ (a-1)(b-1) = 0 \end{cases} \begin{cases} a = b \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Значит единств. решение — это $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = 1 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Осталось отобрать корни, принадл. отрезку $[-315; 3,14]$.

πk – монотонная функция, зависящая от k, $k \in \mathbb{Z}$. => если найдем крайние значение, при которых корни подходят с не подходят, то найдем все корни.

~~-101π~~ при $k \leq -101$: $X \leq$ ~~-101~~ -101π, т.к. $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, то

$-101\pi \in (-101 \cdot 3{,}15; -101 \cdot 3{,}14)$. $-101 \cdot 3{,}14 = -317{,}14$ =>

все x, у которых $k \leq -101$ по значению $< -317{,}14 < -315$ =>

не подходят

Выполнять задания на титульном

чистовик 2

№1) $k = 100$ подходит, т.к. $-100\pi \in (-315; -314)$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15 \Rightarrow$ $(k \in \mathbb{Z})$

... (в силу монотонности функции πk, все $k \in [-100, 0]$ подходят)

$k = 0$: $x = 0$ подходит, т.к. $-315 < 0 < 3{,}14$

$k = 1$: $x = \pi$ $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ поэтому не подходит $(\pi \neq 3{,}14)$, т.к. $\pi = 3{,}1415...$

Итого: $k \in \{-100; -99; -98; ...; -2; -1; 0\}$.

$\Rightarrow$ решения 101 $(0 - (-101) = 0 + 101 = 101)$.

Ответ: 101.

№2) Используем т. Виета для кубич. многочлена:

$$x^3 - (6+\sqrt{5})x^2 + (7+6\sqrt{5})x - 7\sqrt{5} = 0$$

$$\begin{cases} a+b+c = 6+\sqrt{5} \\ ab+bc+ac = 7+6\sqrt{5} \\ abc = 7\sqrt{5}. \end{cases}$$

$V_{\text{параллелепипеда}} = (a+1)(b+1)(c+1) = (abc) + (ab+ac+bc) + (a+b+c) + 1 =$

$= \underline{7\sqrt{5}} + \underline{\underline{7}} + \underline{6\sqrt{5}} + \underline{\underline{6}} + \underline{\sqrt{5}} + \underline{\underline{1}} = 14 + 14\sqrt{5} = 14(1+\sqrt{5})$

Ответ: $14(1+\sqrt{5})$.

Докажем эту теорему. Пусть есть $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 + dx^2 + ex + f = f(x)$, тогда

$x^3 \underbrace{- (x_1+x_2+x_3)}_{d} x^2 + \underbrace{(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}_{e} x \underbrace{- x_1x_2x_3}_{f} = 0$ (раскрыли скобки)

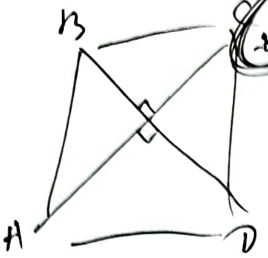
$$\Rightarrow \begin{cases} d = -(x_1+x_2+x_3) \\ e = x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 \\ f = -x_1x_2x_3 \end{cases}$$

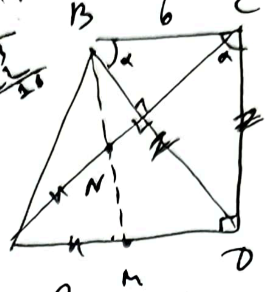
Черновик

2

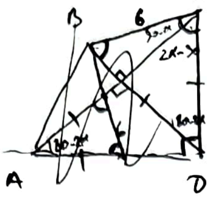
$0 \le 8+a \le 10$

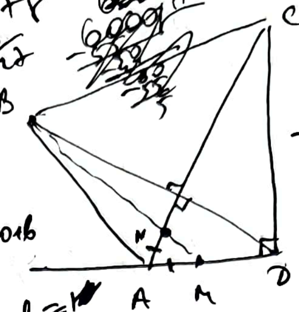
$-8 \le a \le 2$



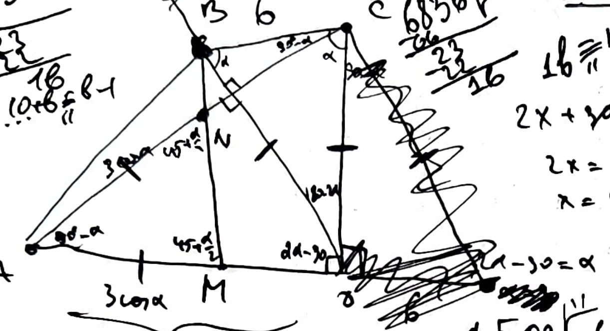


$6831 \equiv_{11}$





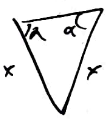
$18 \equiv_{11} 10+8 \equiv_{11} b-1$



$2x + 90 - \alpha = 180$

$2x = 90 + \alpha$

$x = 45 + \frac{\alpha}{2}$



$x^2 = 36 + x^2 - 12x\cos\alpha$

$12x\cos\alpha = 36$

$x\cos\alpha = 3$

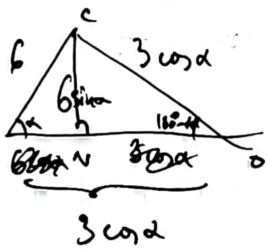
$x = \frac{3}{\cos\alpha}$

$NM^2 = 9\cos^2\alpha + 9\cos^2\alpha - 2 \cdot 9\cos^2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

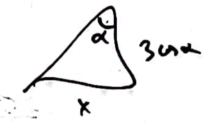
$NM^2 = 9\cos^2\alpha(2 - 2\sin\alpha) = 18\cos^2\alpha(1-\sin\alpha)$

$1009 + 100a \equiv_{11}$

$8+a$

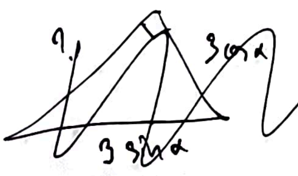


$CN = 6\sin\alpha$



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{}$

$AD = 3\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = 3\cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3\sin\alpha$



$(8+a)(b-1)$

$1000 + 100a + 0 + 9$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	3	5				

$8+a \equiv_{11}$

$b-1 \equiv_{11}$

50-78-01-11 (164.5)

Числовик (3) $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$

№4) рассмотрим остатки при делении на 11 чисел $\overline{1a09}$, $\overline{683b}$

$$\overline{1a09} = 1000 + 100a + 0 + 9 \underset{11}{\equiv} 10 + 1 \cdot a + 9 \underset{11}{\equiv} 19 + a \underset{11}{\equiv} 8 + a$$

$$\overline{683b} = 6000 + 100 + 30 + b \underset{11}{\equiv} 5 + 8 + 8 + b \underset{11}{\equiv} 21 + b \underset{11}{\equiv} b - 1$$

$(8+a)(b-1) \underset{11}{\equiv} 1$ (по условию)

Рассмотрим таблицу, чтобы понять, какие значения могут принимать $(8+a)$ и $(b-1)$.

mod11(b−1)

(произведение остатков от деления на 11)

mod11 (8+a)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	-	-	—	—	—	—	—	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	'	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	'	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	'	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	'	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	'	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	'	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	'	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	'	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	'	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Рассмотрим 10 случаев:

1) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 1 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 4 \\ b \underset{11}{\equiv} 2 \end{cases}$ т.к. $a, b \in [0; 9]$, то: $\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$ 42 — не простое число, делится на 2.

2) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 2 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 5 \\ b \underset{11}{\equiv} 7 \end{cases}$ т.к. $0 \le a, b \le 9$. $\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$ 57 ⋮ 3 не подх.

3) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 3 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 6 \\ b \underset{11}{\equiv} 5 \end{cases} \Rightarrow$ 65 ⋮ 5 или не подх.

4) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 4 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 7 \\ b \underset{11}{\equiv} 4 \end{cases} \Rightarrow$ 74 ⋮ 2 не подх. или

5) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 5 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 8 \\ b \underset{11}{\equiv} 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 10 \end{cases}$ противоречие...

($b = -1$ или 10 или 21... и так далее)

6) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 6 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 9 \\ b \underset{11}{\equiv} 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow$ 93 ⋮ 3 — не подх.

⋮ 3 — не подходит.

7) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 7 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 10 \\ b \underset{11}{\equiv} 9 \end{cases}$ аналогично $a \in \varnothing$...

8) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 8 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 0 \\ b \underset{11}{\equiv} 8 \end{cases} \Rightarrow$ 08 — некорректное число

(см. далее)

Чистовик №4) (4)

9) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 9 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 1 \\ b \underset{11}{\equiv} 6 \end{cases} \Rightarrow$ 16 ⋮ 2 не подх.

или ~~[illegible]~~

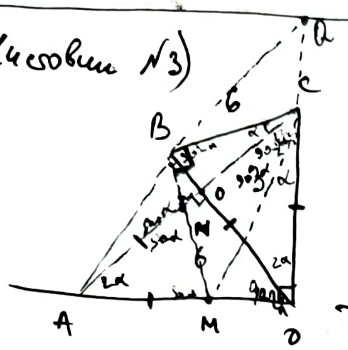
10) $\begin{cases} 8+a \underset{11}{\equiv} 10 \\ b-1 \underset{11}{\equiv} 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \underset{11}{\equiv} 2 \\ b \underset{11}{\equiv} 0 \end{cases} \Rightarrow$ 20 – не подх, делится на 2 ~~[illegible]~~

или ~~[illegible]~~

~~Итого подходят числа:~~ ~~[illegible]~~ Таких чисел нет...

~~[illegible]~~ Ответ: таких чисел нет.

Чистовик №3)



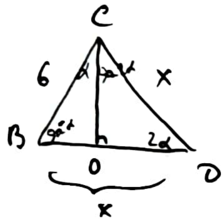
1. Пусть $AC \cap BD = O \Rightarrow AC \perp BD$.

Пусть $\angle CDB = 2\alpha \Rightarrow \angle CBD = \angle DBC = 90^\circ - \alpha$ ($\triangle BCD$ – р/б)

$\Rightarrow \angle BDA = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle OAD = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle NMA = \angle MNA = 90^\circ - \alpha$ ($\triangle NMA$ – р/б)

Тогда $\triangle ANM = \triangle DBC$ по 2 сторонам и углу между ними (2α) $\Rightarrow NM = 6 = BC$.



$BO = 6\sin\alpha$

$OD = x\cos 2\alpha$. Пусть $x = CD = BD = AN = AM$

$36 = 2x^2 - 2x^2\cdot\cos 2\alpha$

$\Rightarrow 18 = x^2(1-\cos 2\alpha) = x^2(1-(1-2\sin^2\alpha)) =$

$18 = x^2 \cdot 2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow 9 = (x\sin\alpha)^2 \Rightarrow x\sin\alpha = 3$, т.к. ($x\sin\alpha > 0$), $\alpha \in (0;\pi)$. $\Rightarrow x = \frac{3}{\sin\alpha}$; $\sin\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi k$.

$AC = CD \cdot \frac{AC}{CD} = \frac{3}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha}$.

$BD = \frac{3}{\sin\alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha} =$

$= \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\sin^3\alpha\cos\alpha}$ нужно найти α.

Заметим, что $\angle CBM = 90^\circ$, т.к. $\angle CBD = 90^\circ - \alpha$, а $\angle DBM = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - 2\alpha) = \alpha$.

$\Rightarrow CB \perp BM$. $CBMD$ – вписанный 4-угольник. ~~$\Rightarrow$ по т. синусов~~:

~~$\frac{6}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin(\ldots)}$~~ $\Rightarrow$ Проведем $CM \Rightarrow \angle MCD = \angle MBD = \alpha$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{MD}{x} \Rightarrow MD = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$.

~~$\triangle ANM \sim \triangle$~~

Черновик 3

1 ход. $M \to (1; 1; \dots; 12)$

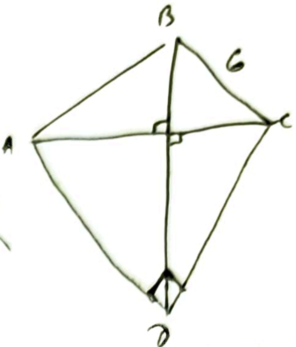
$3 \to (1 \dots 6)$

$\to (2; 1; \dots 6)$.

2 ход. если $M = 3$.

3 ход ...

конец.

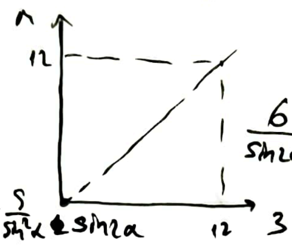


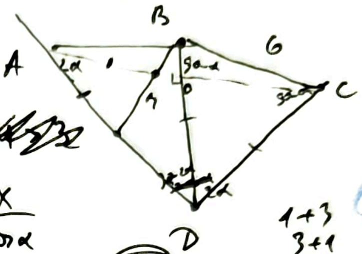
1 2 3 4 5 6

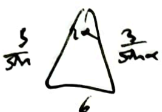
V V ... ?V ... ?

$\frac{6}{\sin 2\alpha}$ $\frac{36}{\cos^2}$

а) М – победит за 1 ход.







$\frac{6}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha}$

$x = \frac{6\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}$

$36 = \frac{9}{\sin^2\alpha} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{9}{\sin^2\alpha} \cdot \sin 2\alpha$

1+3
3+1

1+7
2+3
3+1

3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

1+5
2+4
3+3

$2 = 2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} -\right.$

$\frac{1+5}{2} \cdot 5 + \frac{6}{2} =$

$6830 + 6$

$\frac{1+5}{2}$ $1009 : 11$

$14 \times 6 = 84$

$180 : 12 = 15$

$\overline{1a09} \equiv_{11} 1009 + 100a \equiv a + 8$.

mod 11 (a+8)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mod 11 (b-1)	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10
mod 11 a	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
mod 11 b	2	7	5	4	10	3	9	8	6	0

1

$144 + 13 = 157$

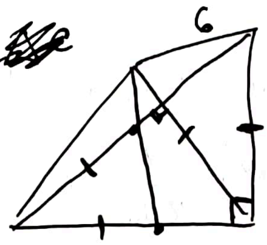
$\frac{OD}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AO}{AD}$.

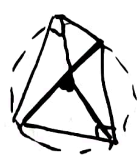
~~42~~ 57 ~~65~~ ~~74~~ ... ~~93~~ ... ~~08~~ 16 20

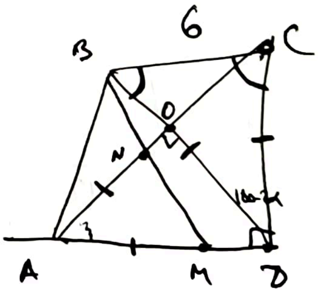
:2 :3 :5 :2 :3 :5 :2

... нет.

$\triangle ADC \sim \triangle AOD$







Чистовик (3)

№5)

Р/м таблицу с значениями суммы у Захара и их вероятности $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$

$P_2 = \frac{1}{36}$, т.к. подх только 1+1

$P_3 = \frac{2}{36}$, т.к. 1+2 / 2+1

$P_4 = \frac{3}{36}$, т.к. 1+3 / 2+2 / 3+1

и тд...

после P_7 случаи симметричны

у Макара: $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 11 & 12 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \dots & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$ равновероятны все знач на кубике.

Р/м вероятность выигрыш Макару при n очков: P_n

$P_1 = 0$; $P_2 = 0$; $P_3 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36}$; $P_4 = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1+2}{36}\right)$; $P_5 = \frac{1}{12}\left(\frac{1+2+3}{36}\right)$ ...

... $P_8 = \frac{1}{12}\left(\frac{1+2+3+4+5+6}{36}\right)$; $P_9 = \frac{1}{12}\left(\frac{1+2+\dots+6+5}{36}\right)$; $P_{10} = \frac{1}{12}\left(\frac{1+\dots+6+5+4}{36}\right)$

$P_{11} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1+\dots+6+5+4+3}{36}\right)$; $P_{12} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1+\dots+6+5+4+3+2}{36}\right)$

Итого: для п.А нужно найти: $P_1 + P_2 + \dots + P_{12} =$

$= 0 + 0 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{36}\left(1 + (1+2) + (1+\dots+3) + \dots + (1+\dots+6) + 4(1+\dots+6) + 5 + (5+4) + (5+4+3) + (5+4+3+2)\right)\right) =$

$= \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{36}\left(1+3+6+10+15+21+4 \cdot \frac{1+6}{2} \cdot 6 + 5+9+12+14\right)\right) =$

$= \frac{1}{12 \cdot 36}\left(4+16+36+4 \cdot \frac{7}{2} \cdot 6 + 14+14+12\right) = \frac{1}{12 \cdot 36}\left(56+84+30+10\right) =$

$= \frac{1}{12 \cdot 36}\left(140+40\right) = \frac{\cancel{180}}{\cancel{12} \cdot 36} = \boxed{\frac{15}{36}}$ п. А

б) Значит в 3 ходах должно получиться одинаковое кол-во очков.

Вероятность, что в один из ходов это произойдет.

если $1=1 \Rightarrow 0$

$2=2 \Rightarrow \frac{1}{36 \cdot 12}$

$3=3 \Rightarrow \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$4=4 \Rightarrow \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$5=5 \Rightarrow \frac{4}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$6=6 \Rightarrow \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$7=7 \Rightarrow \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$8=8 \Rightarrow \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$9=9 \Rightarrow \frac{4}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$10=10 \Rightarrow \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$11=11 \Rightarrow \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$12=12 \Rightarrow \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{12}$

$\frac{1}{12}\left(\cdot \frac{1}{36}\left(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1\right)\right)$

$= \frac{1}{12 \cdot 36} \cdot \left(\left(\frac{1+5}{2} \cdot 5\right) \cdot 2 + 6\right) = \frac{1}{12 \cdot 36} \cdot 36 = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow$ Чтобы в 3 ходах были ничьи, нужно: $\boxed{\left(\frac{1}{12}\right)^3}$

ответ п. б. —

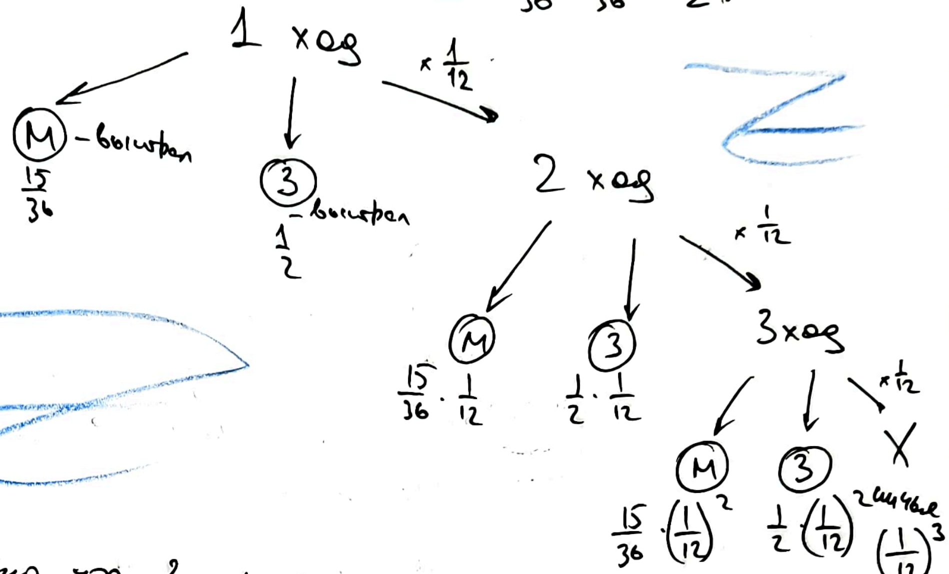
Чистовик №5) В) б

из п.А и п.Б $\Rightarrow$

1 ход $\to$ Маша выиграл $\frac{15}{36}$

$\to$ Ничья, играют 2 игру $\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$

$\to$ Захар выиграл $\Rightarrow 1 - \frac{15}{36} - \frac{3}{36} = \frac{1}{2} = \frac{18}{36}$.



Очевидно, что Захар выигрывает с большей вероятностью, из этой таблицы

а именно: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\cancel{12}\ \frac{144+12+1}{144}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{157}{144} = \frac{157}{288}$

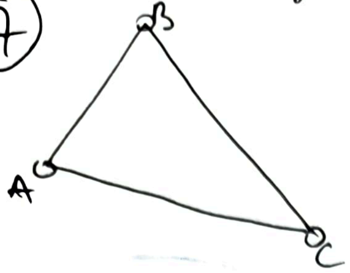
Ответ: А) $\frac{15}{36}$

б) $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{12^3}$

В) $\frac{157}{288}$. Захар.

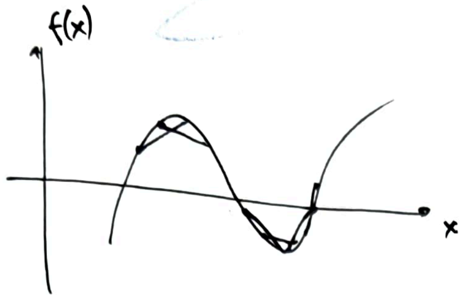
Чистовик №6) Возьмем произвольный треугольник

7



точки $A, B, C \in f(x)$, где $f(x) =$
$= a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \dots a_2x^2 + a_1x + a_0$.

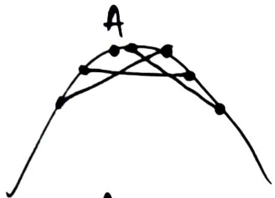
Если внутри ΔABC или на его границе существует такая точка N, что N не лежит на отрезке (длиной <1) с концами на $f(x)$, то:

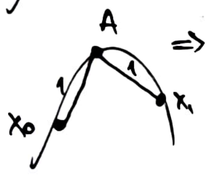


Возьмем произвольный отрезок и функцию на нем:

для каждого x_0 нарисуем отрезок длины 1, соединяющий 2 точки, принадлеж. $f(x)$. Отрезок длины 1 всегда найдётся в силу того, что $f(x)$ — непрерывная.

~~Пусть ее~~ Возьмем произвольную точку A: она лежит между какими-то 2 отрезками длины 1. и из нее выходят 2 отрезка длины 1

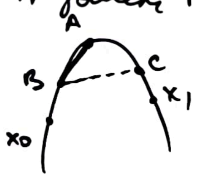




$\Rightarrow$ мы можем взять любую точку для B и C, но между X_0 и X_1, где $AX_0 = 1 = AX_1$

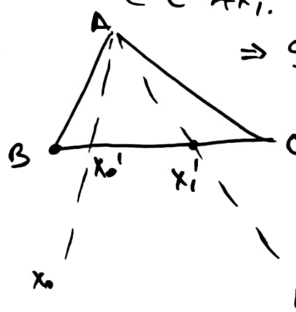
Почему между A и X_0, A и X_1 нет еще одного отрезка длины 1? т.к. мы взяли самую ближнюю точку к A. Функция непрерывная $\Rightarrow$ по мере приближения к A длина отрезка $\downarrow$.

Возьмем B $AB < AX_0 = 1$.



C лежит на AX_1. и так, чтобы $BC < 1$.
выберем $C \in \overset{\frown}{AX_1}$.

Итого:



$\Rightarrow$ для любой точки, леж. в $\Delta ABX_0'$ найдётся прямая, пересек. ее $\Rightarrow$ она будет лежать на отрезке длины 1.
для $\Delta AX_1'C$ аналогично.
для $\Delta AX_0'X_1'$ ...

$\left.\begin{matrix} BC<1 \\ AC<1 \\ AB\text{-прямая} \end{matrix}\right\}$ $CN < 1$, где $N \in AB$.
$\Rightarrow$ (См. далее)

Чистовик №6) 8

$\Rightarrow$ для любой точки $\in \triangle AX_0'Y_1'$ тоже найдется отрезок, соединяющий точки $f(x)$. длины [illegible] < 1.

Черновик.

$f(x) = x^{2025} + \dots + \dots$