0 912639 490001

91-26-39-49
(161.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Топорковой Кристины Ивановны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

Топор

90 (девяносто)

Чистовик. 1

№1

Для удобства будем исчислять скорость в $\frac{км}{мин}$. Пусть $v_{пеш.} = x \frac{км}{мин}$, $v_{вел.} = y \frac{км}{мин}$

В 1 случае велосипедист ехал до встречи $10:30 - 10:15 = 15$ мин, а пешеход шёл $10:30 - 9:15 = 1ч\ 15 мин = 75$ мин

Т.к. они встретились, то расстояния равны $S = vt$

$15y = 75x \ /:15$

$y = 5x$, т.е. велосипедист быстрее пешехода в 5 раз

Во 2 случае до встречи пешеход будет идти $10:00 - 9:15 = 45$ мин, т.к. велосипедист в 5 раз быстрее, то он будет ехать $\frac{45}{5} = 9$ мин

Тогда ему нужно выехать в $10:00 - 9мин = 9:51$

Ответ: 9:51.

№2 $a \in N$

$n(n+4001) = a^2$ (очевидно, $n < n+4001$)

В разложении на прост. множители квадрата натур. числа все множители входят в чётной степени. Тогда возможны только 3 случая:

1) $n = 1$
$n + 4001 = a^2 = 4002$ — не явл. квадратом (т.к. $\vdots 2$, но $\not\vdots 4$)

2) $n = x^2$ $x, y \in N$
$n + 4001 = y^2$

тогда: $n + 4001 - n = 4001 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$ по ФСУ

т.к. 4001 — простое, т.е. $4001 \vdots$ только $1, 4001$, то

Чистовик

2

№2 (продолжение)

$y-x=1$ (очевидно, $y-x<y+x$, т.к. $x>0$)

$y+x=4001$

$\Downarrow$

$2y=4002$

$y=\cancel{400}\ 2001$

$x=\cancel{7}y-1=2001-1=2000$

$n=x^2=2000^2=4000000$

3) в числах n и $n+4001$ при разложении их на прост. множ-ли есть одинаковый множ-ль, который и в n, и в $n+4001$ входит в нечётной степени (т.к. при умножении степени складываются, то в a^2 этот множ-ль как раз станет в чётн. степени)

пусть $n=p^{\alpha}k$, где p — дан. множ-ль, $\alpha \not\vdots 2$

$n+4001=p^{\beta}m=p^{\alpha}k+4001$

$\Downarrow$

$4001 \vdots p$, но т.к. 4001 — простое, то $p=4001$, но тогда:

$n+4001=p^{\alpha}k+p=p^{\alpha+1}k$, если α — нечётн, то $\alpha+1$ — чётн,

тогда

$n(n+4001)=p^{\alpha}k\cdot p^{\alpha+1}k=$

$=p^{2\alpha+1}\cdot k^2$ $2\alpha+1$ — нечёт.

противоречие

Значит, решение, найденное в п. 2 $n=4000000$ — единственное.

Ответ: 4000000.

Чистовик 3

№5

Поскольку разрезы проводятся по линиям сетки, то площадь 8-угольника будет измеряться целым числом клеток.

Т.к. нужно разрезать всю доску, то общая площадь доски должна делиться на площадь одной фигуры.

При этом, т.к. надо получить наибольшее кол-во 8-угольников, то площадь одного 8-угольника должна быть как можно меньше.

$8 \cdot 8 = 64 \,\vdots\, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$

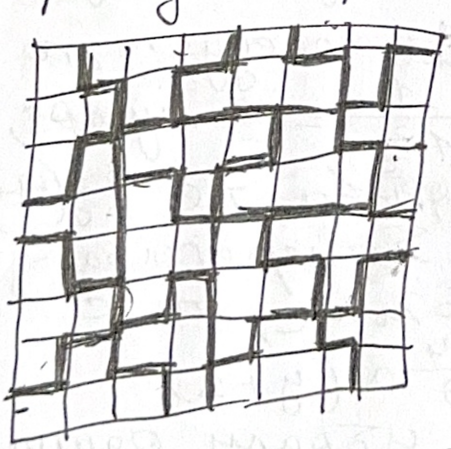
Если площадь 1, то единств. возмож. фигура квадрат 1x1 — 4-угольник, не подх.

Если площадь 2, то единств. возмож. фигура — прямоугольник 2x1 — 4-угольник, не подходит

Если площадь 4, то можно выбрать такую фигуру:

— 8-угольник, подходит.

Приведём пример разбиения:



здесь $\frac{64}{4} = 16$ фигур, и т.к. это минимальная подходящая площадь, то это наибольшее возможное кол-во.

Ответ: 16.

Чистовик.

№6

Пусть в 1 группе a чел-к, тогда во 2-й — $(49-a)$ чел-к (по усл. всего 49)

Пусть в 1 группе перерыв был Z ч, а во 2 — $в$ ч, причём по усл. $в \in [1; 1\frac{1}{3}]$

Пусть 2 группа работала y ч, тогда $1^я$ — $(y+1)$ ч (по усл. начали одновременно, но 1-я закончила на 1ч позже)

По условию, 2 группа без перерыва убрала бы в $1\frac{2}{3}$ раз больше мусора, т.е.

$$\cancel{(49-a)}y = 1\frac{2}{3}\cancel{(49-a)}(y-в)$$

$$y = 1\frac{2}{3}y - 1\frac{2}{3}в$$

$$\frac{2}{3}y = 1\frac{2}{3}в$$

$$y = \frac{5}{2}в,$$ т.к. $в \in [1; 1\frac{1}{3}]$ ч, то $y \in [2{,}5; 3\frac{1}{3}]$ ч.

~~По условию, 1 и 2 группы убрали одинаково мусора, т.е.~~

~~Тогда~~ Из этого же условия следует, что с перерывом они убрали $\frac{1}{1\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$ мусора, кот-й убрали бы без перерыва, т.е. $\frac{3}{5}y(49-a)$

Аналогично, т.к. 1 группа без перерыва убрала бы в $1\frac{3}{4}$ раз больше, то с перерывом они убрали $\frac{4}{7}a(y+1)$.

По усл., 1 и 2 группы убрали одинаково мусора т.е.

$$\frac{3}{5}y(49-a) = \frac{4}{7}a(y+1)$$

$$\frac{3\cdot 49}{5}y = \frac{4}{7}ay + \frac{3}{5}ay + \frac{4}{7}a = \frac{41}{35}ay + \frac{4}{7}a =$$

$$= \frac{1}{7}a\left(\frac{41}{5}y + 4\right)$$

91-26-39-49
(161,7)

Чистовик 5

№6 (продолж.)

$$\frac{3\cdot 49}{5}y=\frac{1}{7}a\left(\frac{41}{5}y+4\right)$$

$$a=\frac{3\cdot 49\cdot 7y}{5\left(\frac{41}{5}y+4\right)}=\frac{3\cdot 49\cdot 7y}{41y+20}$$

при этом $y\in\left[2{,}5;\ 3\frac{1}{3}\right]$, а $a\in\mathbb{Z}$, $a\in(0;49)$

Проверим крайние значения:

$y=2{,}5$

$$a=\frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 2{,}5}{41\cdot 2{,}5+20}=\frac{3\cdot \cancel{49}\cdot 7\cdot \cancel{5}}{\cancel{245}\ 49}=21$$

подходит, но м.б. это не единств. ответ

$y=3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

$$a=\frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 10}{3\left(41\cdot\frac{10}{3}+20\right)}=\frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot \cancel{10}}{47\cancel{0}}=$$

$$=\frac{3\cdot 49\cdot 7}{47}=21\frac{42}{47}\notin\mathbb{Z}$$

Заметим, что при y_{min} и y_{max} значение a различается меньше, чем на 1, значит, между y_{min} и y_{max} целых знач. a нет. Тогда $a=21$ — единственный ответ

т.е. в 1 группе 21 человек.

Ответ: 21.

Чистовик. ~~Ответ~~ 6

№3

$26! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 25\cdot 26$

Заметим, что число оканчивается на столько нулей, какая степень 10 в его разложении.

Т.к. $10 = 5\cdot 2$, при этом, очевидно, степень 2 в числе 26! больше, чем степень 5 (чётных чисел больше, чем $\vdots 5$), то достаточно посчитать степень 5.

Множитель 5 встречается в: 5, 10, 15, 20, 25 (2 раза)

Тогда степень 5: $\underset{в\ 5}{5}\cdot\underset{в\ 10}{5}\cdot\underset{в\ 15}{5}\cdot\underset{в\ 20}{5}\cdot\underset{в\ 25}{5^2} = 5^6$

(степень 2 больше 6 т.к. $2\cdot 4\cdot 8\cdot 16 = 2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4 = 2^{10}$)

Тогда степень 10 — тоже 6, т.е. 26! оканч. на 6 0-й $\Rightarrow c = 0,\ d = 0$.

Очевидно, что $26! \vdots 9$, тогда по признаку делимости на 9 его сумма цифр $\vdots 9$

$4+0+3+2+9+4+1+6+1+1+2+6+6+0+5+6+3+5+5+a+b+0\cdot 6 = (69+a+b) \vdots 9$

~~$0 \le a+b$~~

~~$2 \le a+b$~~

~~$a \ne 0, b \ne 0$ т.к. оканч. все~~

$0 \le a+b \le 18$
$(9+9)$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=3 \\ a+b=12 \end{array}\right.$$

~~По~~ Аналогично, по признаку делимости на 11, знакопеременная сумма числа $26! \vdots 11$.

$\cancel{4}-0+\cancel{3}-\cancel{2}+9-\cancel{4}+\cancel{1}-\cancel{6}+\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{2}-\cancel{6}+\cancel{6}-0+\cancel{5}-\cancel{6}+\cancel{3}-\cancel{5}+\cancel{5}-a+b = (9-a+b) \vdots 11$

$-9 \le b-a \le 9$

$$\begin{array}{l} b-a=-9 \\ b-a=2 \end{array}$$

Чистовик 7

№3 (продолж.)

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a+b=12\\ a+b=3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}b-a=-9\\ b-a=2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$\begin{cases}a+b=3\\ b-a=-9\end{cases} \Leftrightarrow 2b=-6$ противоречие

$\begin{cases}a+b=3\\ b-a=2\end{cases} \Leftrightarrow 2b=5$, $b=2{,}5$ противоречие

$\begin{cases}a+b=12\\ b-a=-9\end{cases} \Leftrightarrow 2b=3$, $b=1{,}5$ противоречие

$\begin{cases}a+b=12\\ b-a=2\end{cases} \Leftrightarrow 2b=14$, $\begin{cases}b=7\\ a=5\end{cases}$ — получается единственное решение

~~С другой стороны, по признаку делимости на 2^k, последние k цифр образуют число, $\vdots\, 2^k$~~

~~$26 \vdots 2^7$, т.к. есть множ-ли $8 \cdot 16 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7$~~

~~7 цифр, 8000000 $\vdots$ 125~~

~~Значит, последние 7 обр. число $\vdots\, 2^7 = 128$~~

~~Раз $b=7$: 7000000 $\vdots$ 128~~

~~7000000 | 128~~
~~640 | 5469~~
~~600~~
~~512~~
~~880~~
~~768~~
~~1200~~
~~1152~~
~~48~~

Ответ: 5, 7, 0, 0.

Чистовик.

№4

Ответ: нет.

Заметим, что на каждом шаге сумма всех чисел на доске изменяется на

$$(5a-3b+7a-5b)-(a+b)=12a-8b-a-b=11a-9b$$

Это число может быть как положительным (~~[illegible]~~), так и отрицательным (например, если $a=15$, $b=20$, то $11a-9b=165-180=-15$).

При этом в итоге сумма должна измениться на $\underbrace{(2001-15)}_{1986}+\underbrace{(2002-16)}_{1986}+\ldots+\underbrace{(2026-40)}_{1986}=$

$=26\cdot 1986$ (на доске написано $40-15+1=$ $=26$ чисел)

Черновик

$a = \frac{3\cdot 49\cdot 7y}{41y+20}$ $\quad y \in [2,5; 3\frac{1}{3}]$ $\quad \boxed{21}$

$a = \frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 5}{205+40} =$ $\quad \times\frac{41}{25}$, $\; 205 + 82 = 102,5$, $\; \cdot 2 = 205$

$= \frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot \cancel{5}}{245 = \cancel{5}\cdot \cancel{49}} = 21$ норм

$a = \frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 3}{41\cdot 3+20} =$ $\quad 123 \; 143$ $\quad 245 / 5 = 49$

$= \frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 3}{143} \notin Z$

$a = \frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 10}{3(\frac{41\cdot 10}{3}+20)} = \frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 10}{41\cancel{0}0+60} = \frac{3\cdot 49\cdot 7\cdot 10}{470} \notin Z$

$= 21\frac{42}{47}$

$\frac{3\cdot 49\cdot 7}{47}$ $\quad \times\frac{49}{21}$, $49 + 98 = 1029$ $\quad 1029 : 47 = 21$, 94, 89, 47, 42

4

21 единиц 6 твёт

2^1

$2,5 - \frac{3\cdot 5}{7\cdot 2} - \frac{3}{7} =$

$= \frac{35-15-3}{14} = \frac{17}{14}$ $\quad \frac{17}{14}\cdot 21 = \frac{3\cancel{1}\cdot \cancel{21}}{\cancel{14}_2} = \frac{93}{2} = 46,5$

$2,5 - 1 = 1,5 \cdot 28 = 42$

$2,5\cdot 28 = 70$

$\frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{42}_6} = \frac{5}{3}$

$21\cdot 3,5 - 21z =$

$= \frac{21\cdot 7}{2} - 21z = 73,5 - 21z = 42$

$21z = 31,5$

$z = \frac{\cancel{63}^9}{\cancel{42}_6} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\frac{\cancel{147}\,21}{2\cdot \cancel{42}_6} = \frac{\cancel{21}^7}{\cancel{12}_4} = 1\frac{3}{4}$

Черновик

№4

$a, b \to 5a-3b,\ 7a-5b$

$7a-5b = 5a-3b+2(a-b)$

$a+b \qquad 5a-3b+5a-3b+2(a+b) =$

$= 12a-8b = 4(3a-2b)$

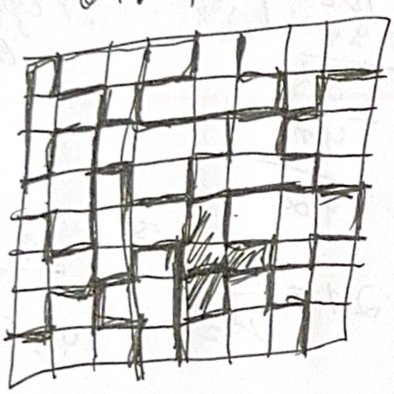
$(12a-8b)-(a+b) = 12a-8b-a-b = 11a-9b$

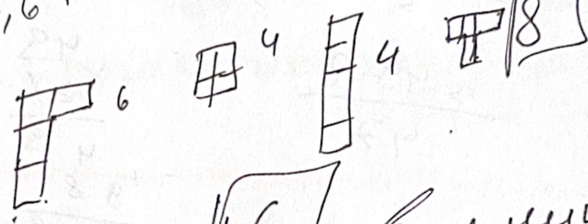
$a = b+1$

$11b+11-9b = 2b+11$

№5

64: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64





6 4 4 $\boxed{8}$

$64:4 = \boxed{16}$ восьмиу?

№6

49 в.

49−a в.

ав.

x мус.

x мус.

$y+1 \quad z-2z \quad y \quad z$

$=b$

$[1; 1\frac{1}{3}]\ z$

$1\frac{3}{4}x \qquad 1\frac{2}{3}x$

$az = \frac{3}{7}a(y+1)$

$z = \frac{3}{7}y + \frac{3}{7}$

$b(49-a) = \frac{2}{5}(49-a)y$

$b\in[1; 1\frac{1}{3}]$

$y\in[2{,}5; 3\frac{1}{3}]$

$b = \frac{2}{5}y$

$\frac{4}{7}a(y+1) = \frac{3}{5}(49-a)y$

$\frac{4}{7}ay + \frac{4}{7}a = \frac{3\cdot 49}{5}y - \frac{3}{5}ay$

$\frac{1\frac{3}{4}x}{y+1} = a$

$\frac{4}{7}+\frac{3}{5} = \frac{20+21}{35} = \frac{41}{35}$

$\frac{41}{35}ay + \frac{4}{7}a = \frac{3\cdot 49}{5}y$

$\frac{x}{y+1-z} = a$

$\frac{1\frac{2}{3}x}{y} = 49-a$

$\frac{1}{7}a\left(\frac{41}{5}y+4\right) = \frac{3\cdot 49}{5}y$

$\frac{x}{y-b} = 49-a$

считаем изв.

$a = \frac{3\cdot 49\cdot 7y}{5\left(\frac{41}{5}y+4\right)} =$

$x = \frac{4}{7}a(y+1)$

$= \frac{3\cdot 49\cdot 7y}{41y+20}$

$x = a(y+1-z)$

$x = (49-a)(y-b)$

$x = \frac{3}{5}(49-a)y$

Черновик.

№1 $y \frac{км}{мин}$ $x \frac{км}{мин}$

$75x = 15y$ $|:15$

$y = 5x$

$45x = Ay$

$9 \cdot 5x = \boxed{9}y$

9мин

$10:00 - 00:09 = \boxed{9:51}$ ответ

№2

$n(n+4001) = a^2$

прост.

либо это $1 \cdot a^2$ (что не подходит, т.к. $1 \cdot 4002 = 4002$ не явл.кв)

либо это $x^2 \cdot y^2$

либо n и $n+4001$ имеют общ. множитель, но тогда это множитель 4001, но тогда в одном из множ. он входит в чёти.ст., в другой в нечёт., след-но в произв. входит в нечёти., но тогда это не квадрат

если $x^2 \cdot y^2$..

n явл. квадратом

$n+4001$ явл. квадратом

тогда $n+4001-n = 4001$ это разность квадр.

$(x-y)(x+y)$ но т.к. простое число, то

$x - y = 1$, $x + y = 4001$

$2x = 4002$

$x = 2001$

$n = x^2 = \boxed{2001^2}$

ответ

№3

выл ~~5!~~ ~~120~~ ~~6!~~ ~~720~~

$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5 \cdot 5}{5} \cdot \frac{5 \cdot 5}{10} \cdot \frac{5 \cdot 5}{15} \cdot \frac{5 \cdot 5}{20} \cdot \frac{5 \cdot 5}{25} = 5^6$ двоек очев больше

$:128 = 2^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ посл. 7 цифр. число $:128$

значит оканч.на 6 нулей

$c, d = 0$

~~6000000~~ 00

$:128$

$= 6 \cdot 1000000$

~~1000000~~ ~~64~~

Черновик

1000.000 | 64
64 | 15625
360
320
400
384
160
128
320
320
0

$b \cdot 1000.000 = b \cdot 64 \cdot 15625 : 128$

$b : 2$

$\overline{ab} \cdot 64 \cdot 15625 : 256$

$\overline{ab} : 4$

сумма цифр: $4+0+3+2+9+4+1+6+1+1+2+6+6+0+5+6+3+5+5+a+b=$

$=(69+a+b):9$

$a+b=3 \Rightarrow b=2,\ a=1$

$a+b=12 \Rightarrow b=4,\ a=8$

$a+b<20$

7! = 5040
40320
362880
3628800
39916800
600
800
200

584 | 8
56 | 73
24
24
0

$(4+3+9+1+1+2+6+5+3+5+6)-$

$(0+2+4+6+1+6+0+6+5+a):11$

512 | 8
48 | 64
32
32
0

$(39+b)-(30+a):11$

$(9+b-a):11$

$9+2-1=10 \not{:} 11$

$9+4-8=$