0 585105 170006

58-51-05-17

(163.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 Е-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Попуряхова Олега Ивановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

(чистовик)

№ 1 СТР. 1

Положим $m = 3^{\sin x}$
$n = 5^{\sin x}$

Тогда:

$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$

$m^2 + n^2 + 1 = mn + m + n$

$m^2 - m(n+1) + n^2 - n + 1 = 0$

$D = (n+1)^2 - 4n^2 + 4n - 4 = -3n^2 + 6n - 3 = -3(n^2 - 2n + 1) = -3(n-1)^2 \geq 0$

чтобы были решения

но, т.к. $(n-1)^2 \geq 0$, то $-3(n-1)^2 \leq 0 \Rightarrow$

$-3(n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$

$m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ решение $m = 1$ и $n = 1$. $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 3^{\sin x} = 1 \\ 5^{\sin x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

т.к. $\pi \approx 3,14$, то подходят:

$-1 \leq k < 100$

т.о. при $k = 100$ $x = 314,1592... > 314$.

Значит число решений 101.

Ответ: 101

№ 2

$x^3 + (22 + 10\sqrt{2})x = (10 + \sqrt{2})x^2 + 22\sqrt{2}$

$x^3 - (10 + \sqrt{2})x^2 + (22 + 10\sqrt{2})x - 22\sqrt{2} = 0$

т.к. a, b, c - корни, то по теореме Виета для многочлена третьей степени получаем:

чистовик

продолжение №2

$a+b+c = 10+\sqrt{2}$

$ab+bc+ac = 22+10\sqrt{2}$

$abc = 22\sqrt{2}$

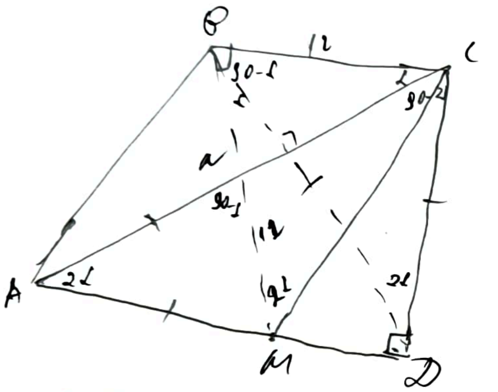
Также, заметим, что т.к. у параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1$ объём равен $(a+1)(b+1)(c+1)$, то нужно найти все возможные значения $(a+1)(b+1)(c+1)$:

$(a+1)(b+1)(c+1) = abc+ab+ac+bc+a+b+c+1 =$

$= 22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}+1 = 33+33\sqrt{2} = 33(\sqrt{2}+1)$

Ответ: $33\cdot(\sqrt{2}+1)$

№3



Пусть $\angle BDC = 2\alpha$, тогда

$\angle ACD = 90-2\alpha \Rightarrow \angle CAD = 2\alpha = \angle NAM \Rightarrow$

$\angle ANM = 90-\alpha \Rightarrow \angle BNC = 90-\alpha \Rightarrow$

$\angle NBD = \angle MBD = \alpha \Rightarrow$

т.к. $\angle DBC = \underset{\frac{180-2\alpha}{2}}{\underset{\uparrow}{90-\alpha}}$ $\left(\cancel{\frac{180-2\alpha}{2}}\right)$, то

$\angle MBC = 90^\circ \Rightarrow$ в $MBCD$ $\angle MBC + \angle MDC =$

$= 180^\circ \Rightarrow MBCD$ – впис. $\Rightarrow$

$\angle MCD = \angle BMD = \alpha.$

Также $\triangle ANM = \triangle BDC$ (по углу и 2-ум сторонам) $\Rightarrow$ $NM = BC = 12.$

Также $\angle BCN = 90 - \angle CBD = \alpha$, тогда

$CM^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{по теореме Пифагора} \\ \text{в } \triangle CMB}}{=} BC^2 + BM^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{по теореме Пифагора} \\ \text{в } \triangle CDM.}}{=} DM^2 + CD^2$

$\boxed{tg\,\alpha = \frac{6}{\sqrt{CD^2-36}}}$

тогда $BM = BN + NM = 12\,tg\,\alpha + 12 = 12(tg\,\alpha + 1)$

$DM = tg\,\alpha \cdot CD \Rightarrow$ $144 + 144(tg\,\alpha \cancel{+\ldots} + 1)^2 = CD^2(tg^2\alpha + 1)$

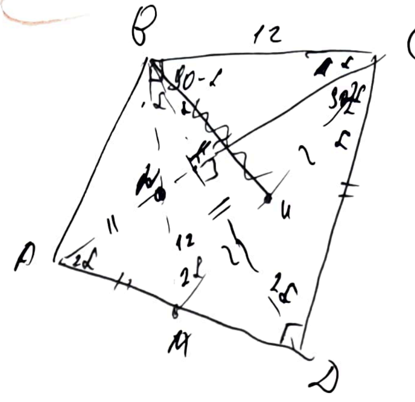
при этом $\sin\alpha = \frac{6}{CD} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{CD^2-36}}{CD} \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{CD^2}{CD^2-36}$

$144(1+(tg\,\alpha+1)^2) = \frac{CD^4}{CD^2-36}$

$S_{ABCD} = \frac{AC\cdot BD}{2} = \frac{AC\cdot CD}{2} \Rightarrow$ т.к. $AC = \frac{CD}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, $\cancel{\text{то}} = \frac{CD^3}{2\cdot 6\sqrt{CD^2-36}} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{CD^4}{24\sqrt{CD^2-36}}$

черновик

$S_{ABCD} - ?$



$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$

$\frac{AH \cdot HB}{2} + \frac{CH \cdot DH}{2} + \frac{CH \cdot BH}{2} + \frac{DH \cdot AH}{2} =$

$= \frac{AH \cdot (BD) + BD \cdot CH}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2}$

$BN \cdot AC =$

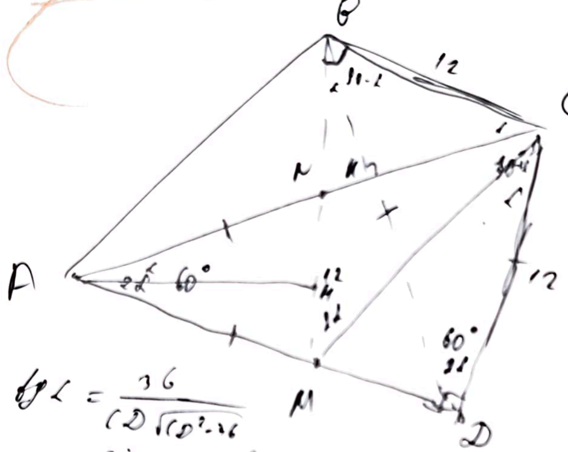
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$tg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$tg^2 \alpha + 1 = \frac{6}{CD^2 - 36}$

$\frac{12}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{BD}{\sin(90-\alpha)}$

$\frac{AC \cdot BD}{2}$



$AC \cdot BD - ?$

$AC \cdot$

$BN = tg\alpha \cdot 12$

$tg^2 \alpha \cdot 144 + 144 =$

$= CD^2 + tg^2\alpha \cdot CD^2 \Rightarrow$

$tg\alpha = \frac{36}{CD\sqrt{CD^2 - 36}}$

$\sin\alpha = \frac{6}{CD}$

$\frac{36}{CD^2}$ $\quad \frac{CD^2 - 36}{CD^2}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{CD^2 - 36}}{CD}$

$DM = tg\alpha \cdot CD$

$CD^2 = 144$

$CD = 12$

$BN + DM = 12(tg + 1)$

$144(tg + 1)^2$

$DM = CD \cdot tg\alpha$

$\alpha = 30°$

$AC = CD \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{3}$

$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 36\sqrt{3}$

$\frac{6}{ON} = \frac{AH}{12}$

$AH \cdot BN = 72$

$CD^2 tg^2\alpha + CD^2 = 144 + 144(tg + 1)^2$

$CD^2 \cdot \frac{36^2}{CD^2 - 36} + CD^2 = \cancel{144 + \ldots}$

$\frac{6}{AH} = tg\alpha$ $\quad AH = \frac{tg\alpha}{6}$ $\quad AH = \frac{6}{tg\alpha}$

$\frac{tg^2\alpha + 2tg\alpha + 1}{tg^2\alpha + 1}$ $\quad 1 + \frac{2tg\alpha + 1}{tg^2\alpha + 1}$

черновик

$12 \cdot 36$ – всего исходов

$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2}$ $\frac{144+12+1}{144}$

$\frac{157}{144}$

$\overline{ab}$ – простое или $\overline{ba}$ – простое

$a=1$ $b=9$

3 1.1 1
4 3
5 8 4088 2906
6

4189 2809

8π 1. 0

$(2900+b)\cdot(4000+100a+89) \equiv_{11} 1$

2900 : 11 = 263

$(7+b)(7+a+1) \equiv_{11} 1$

$(7+b)(8+a) \equiv_{11} 1$

$56 + 7a + 8b + ab \equiv_{11} 1$

$7a + 8b + ab \equiv_{11} 0$

4000 : 11 = 363

если $a=0$, то $8b=0$ ⊖

$a=1$: $7+9b \equiv_{11} 0$ $b=2$

$-2b \equiv -4$

$b \equiv_{11} 2$

$a+b \to 5a-3b+7a-5b$

$12a-8b$

$a-b \to 5a-3b-7a+5b \to 2(b-a)$

$-2(a-b)$

$|a-b| \to 2|a-b|$

$a=2$: $3+8b+2b \equiv_{11} 0$

$10b - b \equiv_{11} -3$

$b=3$

20 и 21

$a=20, b=21$

$100-63$

37

$140-105$

35

$a=3$: $-1+11b \equiv_{11} 0$ ⊖

$a=4$: $28+12b$

-5

$b=5$ 54 и 45 – сост.

20 – не простое?

$a=2$ $b=3$

4289 : 11 = 389

32 – непростое

23

2803 : 11 = 263

$\dot{a}$ и $\dot{b}$ →

$a=5$: $2+2b$ ~~12~~ $\equiv$ $10b \equiv_{11} 10$ ⊖

$a=6$: $-2+14b \equiv_{11} 2$ ⊖

$a=9$: $-3+6b \equiv_{11} 0$

$8+6b \equiv_{11} 0$

$b=6$

20
$100-63$
$105-100$

$a=7$: $5+4b \equiv_{11} 0$ $b=4$ ⊖

$a \neq b$ $a=8$: $1+5b \equiv_{11} 0$

$b=2$ ⊖

$12a-8b$

~~$5b-3a$~~ ~~$5a-3b$~~

$12a-3b = 5b-3a$

$10a = 10b$

$a=t$

$4t-5m$ $5t-3m$

$b=t$

$7t-5m = 4m-5t$

$5t$ $5m-3t$

№4 чистовик стр. 3

$a, b.$ $\overline{ab}$ или $\overline{ba}$ – простое.

$\overline{4a89} \cdot \overline{290b} \underset{11}{\equiv} 1$

$(4000+100a+89)\cdot(2900+b) \underset{11}{\equiv} 1$

$4000 \underset{11}{\equiv} 7$, т.к. $3993 \underset{11}{\equiv} 0$ (по призн. делимости: $3-9+9-3=0$ ⊕)

$100 \underset{11}{\equiv} 1$

$89 \underset{11}{\equiv} 1$

$2900 \underset{11}{\equiv} 7$, т.к. $2893 \underset{11}{\equiv} 0$ $(2-8+9-3=0$ ⊕$)$ $\Rightarrow$

$(7+a+1)\cdot(7+b) \underset{11}{\equiv} 1$

$56+8b+7a+ab \underset{11}{\equiv} 1$

$8b+7a+ab \underset{11}{\equiv} 0.$

Переберём все значения по a: $0 \leq a, b \leq 9$

$a=0$: $8b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b=0$ ⊖

$a=1$: $8b+7 \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow -2b \underset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 9 \Rightarrow b=9 \Rightarrow$ $91 ⋮ 7$ ⊖, $\underline{19}$ ⊕

$a=2$: $8b+14+2b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow -b \underset{11}{\equiv} -3 \Rightarrow b=3 \Rightarrow$ $32 ⋮ 2$ ⊖, $\underline{23}$ ⊕

$a=3$: $8b+21+3b \underset{11}{\equiv} 0$ ⊖

$a=4$: $8b+28+4b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 5 \Rightarrow b=5 \Rightarrow$ $54 ⋮ 9$ ⊖, $45 ⋮ 9$ ⊖

$a=5$: $8b+35+5b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b \underset{11}{\equiv} -2 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 10$ ⊖

$a=6$: $8b+42+6b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 3b \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 3b \underset{11}{\equiv} -9 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 8 \Rightarrow b=8 \Rightarrow$ $68 ⋮ 2$ ⊖, $86 ⋮ 2$ ⊖

$a=7$: $8b+49+7b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 4b \underset{11}{\equiv} +6 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} -4 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow b=7 \Rightarrow 77 ⋮ 7$ ⊖

$a=8$: $8b+56+8b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5b \underset{11}{\equiv} -1 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow b=2 \Rightarrow$ $28 ⋮ 2$ ⊖, $82 ⋮ 2$ ⊖

$a=9$: $8b+63+9b \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 6b \underset{11}{\equiv} 3 \Rightarrow 2b \underset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 2b \underset{11}{\equiv} -10 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} -5 \Rightarrow b \underset{11}{\equiv} 6 \Rightarrow b=6 \Rightarrow$ $96 ⋮ 2$ ⊖, $69 ⋮ 3$ ⊖

Значит, получили единственные значения при $a=1$ и $b=9$, и $a=2$, $b=3$, а простые числа 19 и 23.

Ответ: 19 и 23.

№6 Чистовик. стр. 4

А) Рассмотрим все возможные значения, которые могут выпасть у Тани:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Кол-во всех возможных комбинаций:

$$\underset{\text{у Ани}}{12} \cdot \underset{\text{у Тани на одном}}{6} \cdot \underset{\text{у Тани на втором}}{6} = 6^3$$

если считать кубики одинаковые, если нет, то $2 \cdot 6^3$

Кол-во комбинаций, когда Аня выигрывает:

если у Ани 1, то: 0 если считать что кубики одинаковые. (если 1 2 и 2 1 одно и то же)

Если у Ани:
2 – 0
3 – 1
4 – 2
5 – 4
6 – 6
7 – 9
8 – 12
9 – 15
10 – 17
11 – 19
12 – 20

$\left.\begin{matrix}5-4\\6-6\end{matrix}\right\}10$ $\left.\begin{matrix}4-2\\ \dots \\7-9\end{matrix}\right\}10$ $\left.\begin{matrix}8-12\\9-15\end{matrix}\right\}27$ $\left.\begin{matrix}10-17\\11-19\end{matrix}\right\}36$

$20+20+2+36+27=105=3\cdot 35 \Rightarrow$

$P=\frac{3\cdot 35}{6^3}=\frac{35}{72}$

Если кубики не одинаковые. (то есть если 1 2 и 2 1 для нас не одно и то же)

1 – 0
2 – 0
3 – 1
4 – 3
5 – 6
6 – 10
7 – 15
8 – 21
9 – 26
10 – 30
11 – 33
12 – 35

$\left.\begin{matrix}3-1\\4-3\\5-6\end{matrix}\right\}10$ $\left.\begin{matrix}8-21\\ \dots \\11-33\end{matrix}\right\}110$ $\left.\begin{matrix}7-15\\ \dots \\11-33\end{matrix}\right\}50$

$110+50+10+10=180$

$$P=\frac{180}{2\cdot 6^3}=\frac{6\cdot 10\cdot 3}{2\cdot 6\cdot 6\cdot 3\cdot 2}=\frac{5\cdot 6}{2\cdot 6\cdot 6}=\frac{5}{12}$$

Ответ: $\frac{5}{12}$ или $\frac{35}{72}$
скорее всего имеется ввиду именно этот.

Б) Победитель не выявлен $= P_{1\,\text{навряд в 1-ом раунде одинаковое кол-во очков}} \cdot P_{2\,\text{навряд во втором}} \cdot P_{3\,\text{в третьем одинаковое кол-во очков}}$

Причём $P_1=P_2=P_3 \Rightarrow$ нужно найти P_1^3.

Воспользуемся таблицей из пункта А.

- Если в условии имеется ввиду, что 1 2 и 2 1 для нас одно и тоже, то: кол-во всех комбинаций 6^3

искомых: если у Ани:
1 – 0
2 – 1
3 – 1
4 – 2
5 – 2
6 – 3
7 – 3
8 – 3
9 – 2
10 – 2
11 – 1
12 – 1

то есть $3\cdot 7=21$

$P_1=\frac{21}{6^3}=\frac{3\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 36}=\frac{7}{72}$

$P_{иск}=P_1^3=\frac{7^3}{72^3}=\left(\frac{7}{72}\right)^3$

Ответ: $\frac{7}{72}$

продолжение №6. | Чистовик | стр. 5

• Если 1 2 и 2 1 не одно и тоже:

то всего комбинаций $2\cdot 6^3$

у Ани:

1 - 0
2 - 1
3 - 2
4 - 3
5 - 4
6 - 5
7 - 6
8 - 5
9 - 4
10 - 3
11 - 2
12 - 1

$6+6+6+6+6+6 = 6\cdot 6 = 36$

$P_1 = \frac{6^2}{2\cdot 6^3} = \frac{1}{12}$

$P_{иск.} = \left(\frac{1}{12}\right)^3$

Ответ: $\left(\frac{1}{12}\right)^3$ или $\left(\frac{7}{72}\right)^3$

смотря что имеется ввиду в условии

в) ~~посчитаем вероятность выиграть Ане в одном~~

вероятность, что Аня выиграет в первом раунде равна:

• Если подразумевается, что 1 2 и 2 1 одно и тоже:

$\frac{35}{72}$ => вероятность, что выиграет Таня:

$1 - \frac{35}{72} - \frac{7}{72} = \frac{30}{72} < \frac{37}{72}$ =>

~~$1 - \frac{35}{72} - \left(\frac{7}{72}\right)^3 = \frac{72^3 - 35\cdot 72^2 - 7^3}{72^3} = \frac{37\cdot 72^2 - 7^3}{72^3} = \frac{37}{72} - \left(\frac{7}{72}\right)^3$~~

~~$\frac{35}{72} < \frac{37}{72} - \left(\frac{7}{72}\right)^3$~~ ~~значит вероятность, что выиграет Таня больше.~~

выиграет Аня.

$P_{иск} = \frac{30}{72}\cdot\left(1 + \frac{7}{72} + \frac{7^2}{72^2}\right)$

~~$\frac{7^3}{72^3} < \frac{2}{72}$~~

~~$\frac{7^3}{72^2} < 2$~~

~~$\frac{37}{72} - \left(\frac{7}{72}\right)^3 + \left(\frac{37}{72} - \left(\frac{7}{72}\right)^3\right)\cdot\left(\frac{7}{72}\right) + \left(\frac{37}{72} - \left(\frac{7}{72}\right)^3\right)\cdot\left(\frac{7}{72}\right)^2 =$~~

~~$= \left(\frac{37}{72} - \left(\frac{7}{72}\right)^3\right)\left(1 + \left(\frac{7}{72}\right) + \left(\frac{7}{72}\right)^2\right)$~~

• если подразумевается, что 1 2 и 2 1 не одно и тоже, то:

$\frac{5}{12}$ => вероятность, что выиграет Таня: $1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{12}$ ~~$= \frac{12^3 - 5\cdot 12^2 - 1}{12^3}$~~

$\frac{1}{2} > \frac{5}{12}$ ~~$= \frac{7\cdot 12^2 - 1}{12^3} > \frac{5}{12}$~~ => Таня выиграет с большей вероятностью

Эта вероятность: ~~$\frac{7\cdot 12^2 - 1}{12^3} + \frac{7\cdot 12^2 - 1}{12^3}\cdot\frac{1}{12}$~~ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144}\right)$

Продолжение №6 | Чистовик | стр. 6

$$P_{п.т.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2}\right) = \frac{157}{288}$$

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} = \frac{144+12+1}{144} = \frac{157}{144}$$

Ответ: Аня с вероятностью $\frac{30}{72}\left(1 + \frac{7}{72} + \frac{7^2}{72^2}\right)$ или Таня с вероятностью $\frac{157}{288}$.

Скорее всего в условии подразумевается этот ответ.

В пункте В считается, что тот у кого вероятность больше выиграть в одном раунде больше, то больше вероятность выиграть в дуэнциле, т.к. если t - вероятность ничьи в одном раунде, то вероятность выиграть в дуэнциле у такого будет (пусть $p_1 > p_2$):

ничья в первом раунде + победа во втором; ничья в первых двух + победа в третьем.

$$p_1 + \overset{2}{p_1 t} + t \cdot t \cdot p_1 = p_1(1 + t + t^2) > p_2(1 + t + t^2)$$

№5

Заметим, что изначально между выбранными числами разница $|a-b|$, а после замены $|5a - 3b - 7a + 5b| = 2|a-b| \Rightarrow$