



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Наумова Елена Сергеевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
« 5 » апреля 2026 года

Подпись участника
[Signature]

Чистовик

№1 Пусть скорость пешехода x км/ч, а велосипедиста y км/ч. Тогда $\frac{(10\frac{1}{4} - 9\frac{1}{4}) \cdot x}{y} = 10\frac{1}{2} - 10\frac{1}{4}$

т.е. $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$ и $y = 4x$. (В решении переводим время на пол-часа, $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ и $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$). Пусть

велосипедисту нужно было выехать в t часов, тогда $\frac{(t-9\frac{1}{4})x}{4x} = 10-t$, $t-9,25=40-4t$, $5t=49,25$ и $t=9,85=9\frac{85}{100}=9\frac{51}{60}$.

Ответ: в 9:51

№2 Пусть для некоторого натурального n

$n(n+4001) = m^2$, где m - натуральное. Тогда $m > n$.

Пусть $x = m - n$, т.е. $m = n + x$. Тогда $n^2 + 4001n = n^2 + 2nx + x^2$ и $4001n = 2nx + x^2$, т.е. $(4001 - 2x)n = x^2$ и $n = \frac{x^2}{4001 - 2x}$.

Заметим, что если $x \geq 4001$, $n^2 + 2nx + x^2 > n^2 + 2 \cdot 4001n > n^2 + 4001n$, противоречие. Значит 4001 и x взаимнопросты, и если $4001 - 2x \div p$, то $x^2 \div p$ (где p - некоторое простое число). Значит $4001 - 2x = 1$ и $x = 2000$ ($x^2 > 0$, $n > 0$, $\Rightarrow 4001 - 2x > 0$), т.е. $n = \frac{2000^2}{4001 - 2000 \cdot 2} = 2000^2$

$= 4000000$.

Ответ: 4 000 000.

№3 $26! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 \cdot \dots \cdot 10 \cdot \dots \cdot 15 \cdot \dots \cdot 20 \cdot \dots \cdot 25 \cdot 26$, т.е. $26!$ в степени делится на 5^6 , и т.д. Степень вложения 2 в $26!$ явно больше даже 8 (~~$2 \cdot \dots \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 \cdot \dots \cdot 16$~~) ($26! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 \cdot \dots \cdot 16 \cdot \dots$, $16 = 2^4$, $8 = 2^3$, $4 = 2^2$), $26!$ имеет на конце ровно 6 нулей (т.е. $26! \div 10^6$ и $\nexists 10^7$), нулями последние две цифры, не считая нулей, по кривизне делимости на 4 образуют крайнее 4 число.

(к №3)

Значит $26! : 11$, а значит

$$(4+3+9+7+7+2+8+5+3+5+b+d+0+0) - (0+2+4+6+7+6+0+6+5+a+c+0+0) : 11.$$

$c=d=0$, но тогда имеем (по теореме о цифровом делении на 11) $a+b : 11$, т.е. $a \equiv b \pmod{11}$.

Если $b=0$, $a=7$. $7 \not\equiv 4 \pmod{11}$. Если $b=1$, $a=8$. $8 \not\equiv 4 \pmod{11}$. Если $b=2$, $a=9$.

т.е. $7+9+7+0+8+5+b \equiv 6+6+7+11+a$,

$$16+18+5+b \equiv 12+18+a \pmod{11}$$

$$21+b \equiv 12+a \pmod{11}$$

$$b+9 \equiv a \pmod{11}, \text{ т.е. при } b=0 \ a=9, 9 \not\equiv 4 \pmod{11}.$$

При $b=1 \ a \equiv 10$ и $a=9$, при $b=2 \ a \equiv 11$, т.е. $a=0, 0 \not\equiv 4 \pmod{11}$.

При $b=3 \ a \equiv 1$ и $a=1, 13 \not\equiv 4 \pmod{11}$. При $b=4 \ a=2$, при $b=5 \ a=3, 35 \not\equiv 4 \pmod{11}$.

При $b=6 \ a=4, 46 \not\equiv 4 \pmod{11}$. При $b=7 \ a=5, 57 \not\equiv 4 \pmod{11}$. При $b=8 \ a=6$,

при $b=9 \ a=7, 79 \not\equiv 4 \pmod{11}$. Т.е. возмозны только

$a=2, b=4$ и $a=6, b=8$. Но при $a=2, b=4 \frac{26!}{10^6} =$

$$= 403...35524 \cdot 524 \cdot 8, \Rightarrow \frac{26!}{10^6} \not\equiv 2^3 \pmod{11}, \text{ но } \frac{26!}{10^6} \equiv 2^{9-6} = 2^3 \pmod{11},$$

противоречие, $\Rightarrow a=6, b=8$.

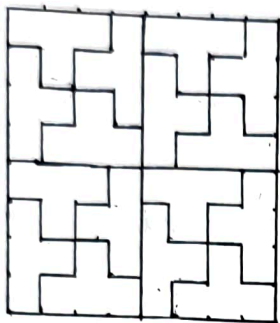
Ответ: $a=6, b=8, c=0, d=0$.

№4 Пусть a и $b \not\equiv 5$. Тогда оба новых числа также $\not\equiv 5 \pmod{5}$ (т.е. $5a-3b$ и $7a-5b$).

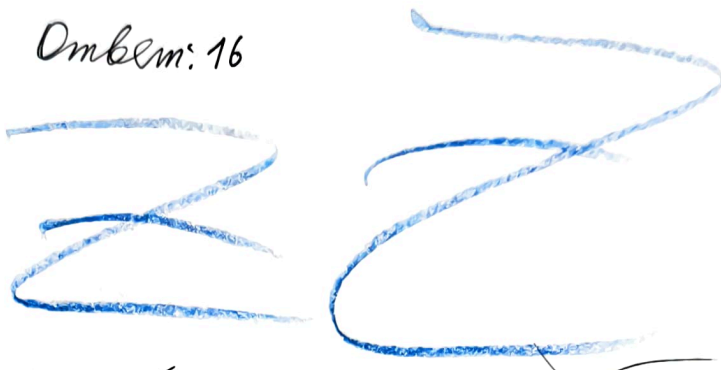
Если $a \equiv 5$ и $b \not\equiv 5, 5a-3b \not\equiv 5$ и $7a-5b \equiv 5$. Если $a \not\equiv 5$ и $b \equiv 5, 5a-3b \equiv 5$ и $7a-5b \not\equiv 5$. Если $a \equiv 5$ и $b \equiv 5$, оба новых числа $\equiv 5$.

Значит количество чисел, кратных 5 не увеличивается. Но изначально их 6 (15, 20, 25, 30, 35, 40), а среди чисел от 2001 до 2026 их 5 (2005, 2010, 2015, 2020, 2025). Ответ: нет.

№5 Заметим, что у фигуры из 1 и 2 клеток только 4 узла. У 1+3 их тоже 4, а у угла (□) их 6, $6 < 8$. Значит у такой восьмиугольничков ≥ 4 клетки, и в квадрате 8×8 помещается не более $\frac{8 \cdot 8}{4} = 16$. Пример на 16: (разбиваем на □)



Ответ: 16



№6 Пусть в 1 группе было x человек, ~~тогда~~ вторая группа закончила через t часов после начала, перерыв на обед у 1 группы длился q_1 часов, у второй q_2 часов. Тогда $1\frac{3}{4} \cdot x \cdot (t+1-q_1) = x \cdot (t+1)$, т.е. $1\frac{3}{4} q_1 = \frac{3}{4} (t+1)$, $7q_1 = 3(t+1)$ и $q_1 = \frac{3}{7}t + \frac{3}{7}$, и $t+1-q_1 = t+1 - \frac{3}{7}t - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}t + \frac{4}{7}$.

Также $1\frac{2}{3} \cdot (49-x) \cdot (t-q_2) = (49-x)(t-q_2)$, т.е. $t \cdot \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3} q_2$, т.е. $5q_2 = 2t$ и $q_2 = \frac{2}{5}t$. Тогда $t - q_2 = \frac{3}{5}t$. Тогда

$$x \cdot \left(\frac{4}{7}t + \frac{4}{7}\right) = (49-x) \cdot \frac{3}{5}t. \text{ Домножим обе части на 35:}$$

$$20tx + 20x = 49 \cdot 21t - 21tx, \text{ т.е.}$$

$$41tx + 20x = 1029t \text{ и } x = \frac{1029t}{41t+20}.$$

$q_2 \geq 1$, т.е. $\frac{2}{5}t \geq 1$, $t \geq \frac{5}{2}$. Также $q_2 \leq 1\frac{1}{3}$, т.е. $\frac{2}{5}t \leq 1\frac{1}{3}$, $t \leq \frac{10}{3}$. Выразим ~~тогда~~ значение x от t .

строго возрастает при росте t (при $t > 0$), т.к. $1029 > 41 \cdot \frac{10}{3}$. П.е. минимальное $x = \frac{1029 \cdot \frac{5}{2}}{41 \cdot \frac{5}{2} + 20} = \frac{1029 \cdot 2.5/2}{41 \cdot 2.5/2 + 20} = \frac{5145}{245} = 21$, а максимальное $x = \frac{1029 \cdot \frac{10}{3}}{41 \cdot \frac{10}{3} + 20} = \frac{1029 \cdot 10/3}{41 \cdot 10/3 + 20} = \frac{10290}{47} < 22$ (т.к. $47 \cdot 22 = 1034$), $\Rightarrow 21 \leq x < 22$. П.к. $x \in \mathbb{N}$) $x = 21$.

СТРАНИЦА 3 из 4. Ответ: 21.

Сравним ^{этот подсчет} ~~эти~~ дроби для $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1029t}{416+20}$$

$$\text{и } \frac{1029(t+x)}{41(t+x)+20}$$

, где t и $x > 0$:

$$(1029t)(41t+41x+20) \text{ v } 1029(t+x)(416+20)$$

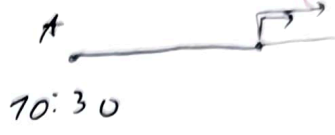
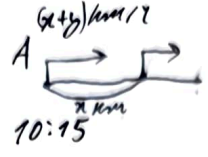
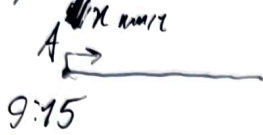
$$1029 \cdot 41t^2 + 1029 \cdot 41tx + 1029 \cdot 20t \text{ v } 1029 \cdot 41t^2 + 1029 \cdot 416x + 1029 \cdot 20t$$

$0 < 1029 \cdot x \cdot 20$, т.е. правая дробь больше, ч.к.г.

Водо

66-95-82-69
(161.5)

Черновик. ~~Б~~ Чистовик через 5 страниц.



$$\frac{51-15}{4} = \frac{2}{60}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

$$y = 4x$$

$$\frac{(t-9,25) \cdot x}{4x} = 10-t$$

$$51-15=36$$

$$4001$$

$$t-9,25 = 40-4t$$

$$5t = 49,25$$

$$t = 9,85$$

$$\frac{35}{100} = \frac{17}{20} = \frac{51}{60}$$

9:51

$$n(n+4001) = n^2 + 4001n = m^2$$

n x
x n

$$m = n+x$$

$$n(n+p) = n^2$$

$$n^2 + 4001n = n^2 + 2nx + x^2$$

$$2000^2 + 4001 =$$

$$= 2000(2000+2) + 1 =$$

$$= 2000^2 + 2 \cdot 2000 + 1 =$$

$$= (2000+1)^2$$

$$2x + x^2 = 4001n$$

$$x(x+2) = 4001n$$

$$1. \quad x : 4001$$

$$x = 4001y$$

$$y(4001y+2) = n$$

$$4001n = 2xn + x^2$$

$$4001n = x(2n+x)$$

$$1. \quad x : 4001$$

$$4001n = 4001 \cdot 2n + \dots$$

$$\Rightarrow 2n+x = 4001$$

$$x \cdot 4001, \quad n \cdot 4001$$

$$2n+x = 4001$$

$$x = 4001 - 2n$$

$$x < 4001$$

$$4001n = 2xn + x^2$$

$$(4001-2x)n = x^2$$

$$n = \frac{x^2}{4001-2x}$$

$$x \text{ - дел. } \leq 2000$$

$$x^2 = (4001 - 2x)n$$

$$n \leq \frac{2000^2}{1} = 2000^2$$

$$n^2 + 4001n$$

$$an = \left(\frac{4001a-1}{2} \right)^2$$

$$n^2 + 4001n + 2000^2$$

$$2000^2(2000+4001) = n = 2000^2 = 4,000,000$$

$$= 2000^3 + 2000^2 \cdot 4001 = 2000^3 + 2000^2 \cdot 4000 + 2000^2 \cdot 1$$

$$= (2000 \cdot 4001)^2$$

$$(x, 4001) = 1$$

$$x^2 = p^{2d}$$

$$x = p^d$$

$$n = p^{2d}$$

Терновит

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26$$

$$= 10^6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 26$$

$\alpha \cdot b \equiv 4$

$$(4+3+9+1+1+2+6+5+3+5) - (0+2+4+6+1+6+0+6+5) - \alpha + \beta \equiv 11$$

~~$$3+9+1+5+3+8$$

$$6+6+\alpha$$~~

~~$$3+9+1+5+3+8$$~~

~~$$6+6+\alpha$$~~

~~$$(7+10+1+8+10+3) - (12+7+13) =$$~~

~~$$= (20+10+2) - (20+12) = 19 - 12 = 7$$~~

~~$$7 - \alpha + \beta \equiv 0$$~~

$$12+9 \cdot b \equiv 12+\alpha$$

b	α	α - b
0	9	9
1	8	7
2	7	5
3	6	3
4	5	1
5	4	0
6	3	-1
7	2	-2
8	1	-3
9	0	-4

$$\alpha - b \equiv 7$$

$$\alpha \equiv 7 + b$$

5ab

46

4800

6800-4600

15 20 25 30 35 40 6

2005 2010 2015 2020 2025 5

a, 0:5

a:15, b:5

a:15, b:5

a:5, b:5

x: v

x:5, :5 v

:5, :5 v

:5, :5 v



$$x \quad 49-x$$

$$t+1 \quad t$$

$$-q_1 \quad -q_2$$

$$1 \leq q \leq 1\frac{1}{2}$$

$$x \cdot (t+1 - q_1) = (49-x)(t - q_2)$$

$$x \cdot (t+1) = 1\frac{1}{3} (49-x)(t - q_2)$$

$$1\frac{1}{3} x \cdot (t+1 - q_1) = (49-x) \cdot t$$

$$1\frac{1}{3} x (t+1) = (49-x) \cdot t + 1\frac{1}{3} x \cdot q_1$$

$$5x(t+1) + 5xt = 5 \cdot 49t + 5q_1x$$

Чертовик $\frac{3}{4}$

$$x \cdot (t+1) - x q_1 = (49-x) \cdot t - (49-x) q_2$$

$$\frac{2}{3}(t+1-q_1) \leq 1\frac{1}{3}$$

$$1\frac{3}{4}(49-x)(t-q_2) = (49-x)(t-q_2) + x q_1$$

$$t+1-q_1 \leq 2$$

$$t-q_1 \leq 1$$

$$x q_1 = \frac{3}{4}(49-x)(t-q_2)$$

$$t \leq q_1 + 1$$

$$x q_2 = \frac{2}{3} x (t+1-q_1)$$

$$\frac{2}{3}(t+1-q_1) \geq 1$$

$$q_2 = \frac{\frac{2}{3} x (t+1-q_1)}{x} = \frac{2}{3}(t+1-q_1)$$

$$t+1-q_1 \geq 1,5$$

или

$$x q_1 = \frac{3}{4}(49-x)(t - \frac{2}{3}(t+1-q_1))$$

$$t-q_1 \geq 0,5$$

$$t \geq q_1 + 0,5$$

или

или

$$q_1 = \frac{3(t+1)}{4}$$

$$12 x q_1 = 3$$

$$4 x q_1 = (49-x)(3t-2t-2+2q_1)$$

или

$$4 x q_1 = (49-x)(t-2+2q_1)$$

$$\frac{3(t+1)}{4} \geq t-1$$

$$x q_1 = \frac{(49-x)(t-2+2q_1)}{4}$$

$$3t+3 \geq 4t-4$$

$$\text{или } x t + x - x q_1 = 49t - x t - (49-x)(\frac{2}{3}t + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}q_1)$$

$$\frac{3(t+1)}{4} \leq t+0,5$$

$$2xt + x = x q_1 + 49t + x \cdot \frac{2}{3}t + x \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \frac{2}{3}q_1$$

$$3t+3 \leq 4t(2-\frac{2}{3})x + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}q_1 x$$

$$-49 \cdot \frac{2}{3}t - 49 \cdot \frac{2}{3} + 49 \cdot \frac{2}{3}q_1$$

$t \geq 5$

$$x(t+1) = (49-x)t$$

$$x(t+1) + (49-x)(\frac{2}{3}(t+1-q_1)) = (49-x)t + x q_1$$

$$x \cdot (t+1-q_1) = (49-x)(t - \frac{2}{3}t - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}q_1)$$

$$x \cdot (t+1-q_1) = (49-x)(\frac{t}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}q_1)$$

$$3 x \cdot (t+1-q_1) = (49-x)(t-2+2q_1)$$

Черновик

$$\frac{1}{3} (x \cdot (t+1-q_1)) = (49-x)t$$

$$t \geq q_1 + 0,5 \quad 5x(t+1-q_1) = 49 \cdot 3t - 3xt$$

$$t \leq q_1 + 1 \quad 8(8t+5-5q_1)x = 147t$$

$$q_1 \leq t - 0,5 \quad x = \frac{147t}{8t+5-5q_1}$$

$$q_1 \geq t - 1$$

$$\frac{+294}{5} \\ 1470$$

$$\max \quad \frac{147t}{8t+5-5q_1+5t} \\ \frac{147t}{8t+5-5(t-0,5)} = \frac{147t}{3t+7,5} = \frac{49t}{t+2,5}$$

$$\frac{1470}{45} = \frac{294}{9} = 32,6... \quad \min \quad x = \frac{147t}{8t+5-5(t-1)} = \frac{147t}{3t+10}$$

$$\frac{1029(t+x)}{41(t+x+20)}$$

$$\frac{1029t(41t+20)}{41(t+x+20)} > \frac{294t}{6t+15} \geq x \geq \frac{294t}{6t+20}$$

$$1029 \cdot 41t^2 + 1029 \cdot 20t + 1029 \cdot 41x$$

$$\frac{1470}{45} \rightarrow \frac{1470}{50}$$

$$q_2 = \frac{2}{3}(t+1-q_1)$$

$$\frac{147}{5} = 29,4$$

$$= 29,...$$

$$x \in \{30; 31; 32\}$$

W

$$q_1 = \frac{2}{4}(t_1+1)$$

$$t - q_2 = t - \frac{2}{3}(t+1-q_1) =$$

$$x \cdot (t+1) = x \cdot 3$$

$$= \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}q_1 = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ = \frac{5}{6}t - \frac{1}{6}$$

$$x(t+1-q_1) =$$

$$= (t+1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$$

$$x \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \right) = (49-x) \left(\frac{5}{6}t - \frac{1}{6} \right) \quad | \cdot 12$$

$$3x(t+1) = 2(49-x)(2t-2)$$

$$3xt + 3x = 98t - 98 - 2xt + 2x$$

$$5xt + x = 98t - 98$$

$$x = \frac{98(t-1)}{5t+1}$$

$$t=5$$

$$\frac{98 \cdot 4}{26} = \\ - \frac{98 \cdot 2}{13} = \frac{196}{13}$$

Черновик

$$x(t+1 - q_1)$$

$$A(t+1) = 1 \frac{2}{4}(t+1 - q_1)$$

~~$$t \frac{3}{4}(t+1) = q_1$$~~

~~$$q_1 = \frac{3}{4}(t+1)$$~~

$$(t+1) = (t+1) \cdot 1 \frac{2}{4} - 1 \frac{2}{4} q_1$$

$$1 \frac{2}{4} q_1 = \frac{3}{4}(t+1)$$

$$7 q_1 = 3(t+1)$$

$$q_1 = \frac{3}{7}(t+1)$$

$$t+1 - \frac{3}{7}(t+1) = \frac{4}{7}(t+1)$$

$$x \cdot \left(\frac{4}{7}t + \frac{4}{7}\right) = (49-x) \cdot \frac{3}{5}t \quad | \cdot 35$$

$$206x + 20x = 21 \cdot 49t - 21xt$$

$$416x + 20x = 1029t$$

$$x = \frac{1029t}{416+20}$$

$$1 \leq \frac{3}{5}t \leq 1 \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2}$$

$$2,5 \leq t \leq \frac{10}{3}$$

2,5

~~$$\frac{1029}{41} = \frac{20586}{82t+40}$$~~

$t = \frac{5}{2}$

$$\frac{5145}{205+40} = \frac{5145}{245}$$

$$\frac{10290}{410+60} = \frac{1029}{47}$$

47

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 41} \\ - 82 \\ \hline 209 \\ - 205 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5145 \overline{) 245} \\ - 490 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 47} \\ - 94 \\ \hline 127 \\ - 89 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ 22 \\ \hline 94 \\ 99 \\ \hline 1034 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 21 \\ \hline 79 \\ 98 \\ \hline 1029 \end{array}$$