0 971681 830005

97-16-81-83
(185.3)

+1 доп. лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс Е-1

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Вараксова Дмитрия Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Подпись участника

Дата

«05» апреля 2026 года

85 (восемьдесят пять)

97-16-81-83 (85,5)

Чистовик

12 Жаро

2. $x^3-(10+\sqrt3)x^2-23\sqrt3+(23+10\sqrt3)x=(x-a)(x-b)(x-c)$

По т. Виета:

$\begin{cases}-abc=-23\sqrt3\\ ab+bc+ac=23+10\sqrt3\\ (a+b+c)=10+\sqrt3\end{cases}$

$V_{пар}=(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=$

$=23\sqrt3+23+10\sqrt3+10+\sqrt3+1=\boxed{34\sqrt3+34}$

4. По признаку дел. на 11: $\overline{793a}\underset{11}{\equiv}a+9-3-7\underset{11}{\equiv}a-1$

$\overline{1b09}\underset{11}{\equiv}b+9-1\underset{11}{\equiv}b+8$

Т.е $\overline{793a}\cdot\overline{1b09}\underset{11}{\equiv}(a-1)(b+8)\equiv1$ обе скобки ~~полож.~~ неотр если $a\neq0$. $a=0$ рассм. отдельно.

$a,b\in[0;9]\Rightarrow a-1\leq8\quad b+8\leq17\Rightarrow(a-1)(b+8)\leq8\cdot17=136<$
$<11\cdot13$

Т.е хотим перебрать $(a-1)(b+8)$ от 1 до 133 сравн с 1 по mod 11

I. $(a-1)(b+8)=1$ – Нет т.к $b+8\geq8$.

$(a-1)(b+8)=12$

$(a-1)(b+8)=23$ – нет. т.к 23 – прост и $9+8<23$:13

$(a-1)(b+8)=34=2\cdot17\Rightarrow a=3,\ b=9\Rightarrow$ либо $\boxed{39}$ либо $\boxed{93}$ ⋮ 3 ~~обе~~ ~~простые~~ не прост.

$(a-1)(b+8)=45=5\cdot9\Rightarrow a=6,\ b=1\Rightarrow\boxed{61}$ т.к 16 не прост

$15\cdot3\Rightarrow a=4,\ b=7\Rightarrow\boxed{47}$

$(a-1)(b+8)=56=7\cdot8$ – нет. т.к $b=0\Rightarrow$ ~~$\overline{ba}$~~ не дв., $\overline{ab}$ ⋮ 10

$14\cdot4\Rightarrow a=5,\ b=6$, но не 56 ни 65 не прост.

$(a-1)(b+8)=67$ – прост. $\Rightarrow$ нет реш.

Чистовик

$(a-1)(b+8)=78=2\cdot39=6\cdot13=26\cdot3$

$a=7$ нет реш нет реш.

$b=5$, но $57 \vdots 3$, $75 \vdots 5$

$(a-1)(b+8)=89=$ ~~8~~ простое – нет. реш.

$(a-1)(b+8)=100 \Rightarrow$ ищем $a-1\le8$, $b+8\le17$ $\Rightarrow$ $2\cdot50$, $4\cdot25$, $5\cdot20$ – нет. реш. ~~8~~ нет.

$(a-1)(b+8)=111=3\cdot37$ – нет реш. прост.

$(a-1)(b+8)=122=2\cdot61$ прост.

$(a-1)(b+8)=133=7\cdot19$ нет.

Итого только 61 и 47 если $a\ne0$.

Если $a=0$, то $\overline{ab}$ не двух, а $\overline{ba} \vdots 10 \Rightarrow$ не прост.

Ответ: 61 или 47.

1. $2^{\sin x}=a$, $7^{\sin x}=b \Rightarrow 14^{\sin x}=ab$

$a^2+b^2+1=a+b+ab$

~~$a^2+b^2\ge2ab$~~

$a^2+b^2+1+ab\ge2ab+a+b$, $a,b>0$ т.к степ. функ с пол. осн.

$a^2+b^2\ge2ab$ – всегда

$ab+1\ge a+b \Leftrightarrow a(b-1)+1-b\ge0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)\ge0 \Rightarrow$ либо $a<1$, $b>1$, либо $a>1$, $b<1$ иначе ~~правая~~ левая часть всегда больше или равна ~~левой~~ правой.

Но $a<1$, $b>1 \Leftrightarrow \begin{matrix} 2^{\sin x}<1 \\ 7^{\sin x}>1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin x<0 \\ \sin x>0 \end{cases}$??, аналог. $b<1$, $a>1$

2

97-16-81-83
(185.3)

Чистовик.

Тогда все пер. обр. в рав. $\Rightarrow a = b = 1$

$2^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Решим на $[-3{,}14; 315]$

$-\pi < -3{,}14 \Rightarrow k \leq -1$ не подходят.

$100\pi < 315$ т.к $\pi < 3{,}15$

~~...~~

$101\pi > 315$ т.к $100\pi > 314$ и $\pi > 3$

Значит подходят $-1 < k < 101$ т.е $k \in [0; 100]$, т.е всего 101 решение

Ответ: 101.

5. Всего возможно $12 \cdot 6 \cdot 6$ исходов.

Переберем победу Пети:

П В

~~2~~ ~~1+1~~

~~3~~ ~~1+2~~ ~~2+1~~ ~~3~~

~~4~~ ~~2+2~~ ~~1+3~~ ~~3+1~~ ~~6~~

След. число это пред + число кол-во способов выбить на кубиках число на 1 меньше

П	В	
3	1+1	1
4	1+2 2+1	3
5	1+3 2+2 3+1	6
6	1+4 2+3 3+2 4+1	10
7	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	15

П	В	
8	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	21
9	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	26
10	3+6 4+5 5+4 6+3	30

3

Чистовик

П В
11
4+6
5+5 33
6+4

$\underbrace{1+3+6+10}_{20}+15+21+26+30+33+35$ (20 — 35)

$\underbrace{70+21+26+30+33}_{47}$

$100+80=180$

П В
12
5+6 35
6+5

Итого вероятность победы Пети: $\frac{\overset{70}{38+33}+\overset{100}{30+26}+\overset{36}{21+15}+\overset{20}{10}+\overset{10}{6+3+1}}{12\cdot 6\cdot 6} =$

$= \frac{\cancel{180}^{30\ 5}}{12\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{6}} = \boxed{\frac{5}{12}}$

Б: Найдем вероятность ничьи:

П:	В	
2	1+1	1
3	1+2, 2+1	2
4	1+3, 2+2, 3+1	3
5	1+4 … 4+1	4
6		5
7	1+6 … 6+1	6
8	2+6 … 6+2	5
9	3+6 … 6+3	4
10	4+6 … 6+4	3

П	В	
11	6+5, 5+6	2
12	6+6	1

Итого $\underbrace{1+2+3+4+5}_{15}+6+\underbrace{5+4+3+2+1}_{15}=36$

Т.е вероятность ничьи на каждом ходу это

$\frac{36}{\cancel{181}\ 12\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{6}}=\frac{1}{12}$

$\Rightarrow$ вероятн. победы Васи это

$1-\frac{1}{12}-\frac{5}{12}=\frac{1}{2}.$

4

97-16-81-83 (1853)

Победитель не выявл $\Rightarrow$ 3 ничьи подряд т.е. Чистовик

$\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$ Тогда поб. выявлен с вероятность $1 - \left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1727}{1728}$

$\begin{array}{r} \times 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$

В) Найдем Вероятн. победы Пети:

это $\frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{12^2}$

выигр в первой

ничья в первой выигр. вт.

ничья во вторая, выигр. третью.

Вероятн. победы Васи

$\frac{6}{12} + \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{12^2}$

У Васи каждое слагаемое больше $\Rightarrow$ вероятн. больше.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{144} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144}\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{157}{144} = \boxed{\frac{157}{288}}$

$1 + \frac{13}{144}$

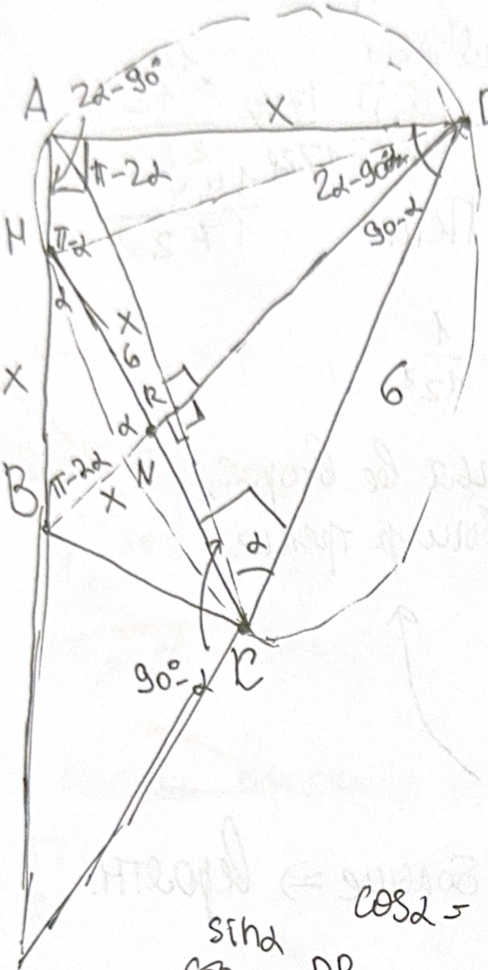
$\frac{157}{144}$

Ответ: А) $\frac{5}{12}$

Б) $\frac{1}{1728}$ и $\frac{1727}{1728}$ - поб. выявлен.

В) $\frac{157}{288}$ у Васи.

Черновик



$\pi-\alpha+2\alpha-90° = 90°+\alpha$

$x^2 \cdot \sin 2\alpha = 2x \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$2x \cdot s$

cos

$\sin 2\alpha = \frac{x}{BD} \Rightarrow BD = x \cdot \sin 2\alpha$

$x \cdot \cos\alpha = 3$

$x \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{DR}{6}$

$\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} = \frac{DR}{6}$

$DR = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \cdot 6$

$DR \cdot x = 6 \cdot \sqrt{x^2-9}$

$DR = \frac{6\sqrt{x^2-9}}{x}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

$\sin\alpha = \frac{6\sqrt{x^2-9}}{x}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{18-x^2}}{x}$

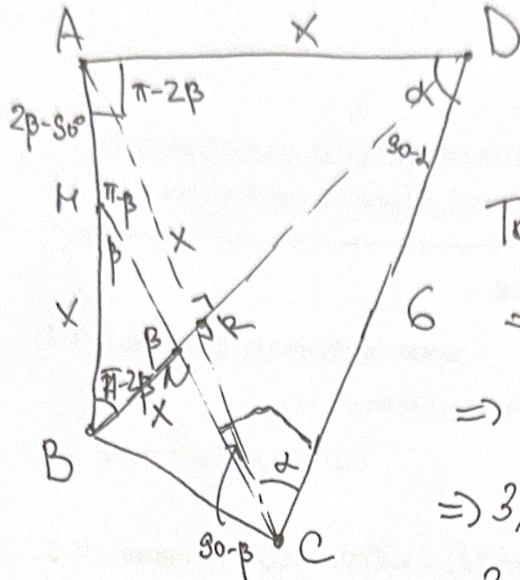
$\cancel{x}2. \ \sqrt{x^2-9} < 3$

$DN =$

$\sin 2\alpha = \frac{x}{BD} \Rightarrow BD = \frac{x}{\sin 2\alpha}$

чистовик

3.



$\exists$ $AD = AC = BM = BN = x$

$\exists$ $\angle ACD = \alpha \Rightarrow \angle ADC = \alpha$ т.к Δ р/б.

Тогда $2S_{ACD} = \cancel{AD}\cdot CD\cdot \sin\alpha =$

$= \cancel{AD}\cdot AC\cdot \sin(\pi-2\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow CD\cdot\sin\alpha = AC\cdot\sin2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cancel{6}\,\cancel{\sin\alpha} = x\cdot\cancel{2}\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha$ $(\sin\alpha\neq0)$

$3 = x\cdot\cos\alpha$

$\exists$ $\angle BMN = \angle BNM = \beta \Rightarrow \angle MBN = \pi-2\beta \Rightarrow \angle CAD = \pi-2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha=\beta$ из $\Sigma\angle\Delta CAD$. Тогда $\angle AMN = \pi-\alpha$, $\angle MAC = 2\alpha-90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACM = 90-\alpha$ из $\Sigma\angle\Delta AMC$. $\angle NDC = 90-\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DN}{6} = \underset{\sin\alpha}{\cos(90-\alpha)} \Rightarrow DN = 6\sin\alpha$

$BN = x \Rightarrow BD = 6\sin\alpha + x$, но из ΔABD $BD = \frac{x}{\sin2\alpha}$

Т.е $\frac{x}{\sin2\alpha} = x + 6\sin\alpha \Rightarrow x = x\sin2\alpha + 6\sin\alpha\sin2\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6\sin\alpha\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}$$

$$\frac{3}{\cos\alpha} = \frac{6\sin\alpha\cdot\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha} \Rightarrow 3-3\underbrace{\sin2\alpha}_{t} = 3\sin^2 2\alpha$$

$3-3t = 3t^2$

$1-t = t^2 \Rightarrow t^2+t-1=0$

$$\cos2\alpha = \frac{\sqrt{-2+2\sqrt5}}{2}$$

$$t>0 = \frac{-1+\sqrt5}{2} = \sin2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}$$

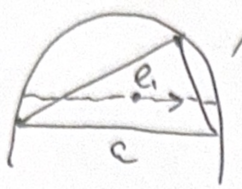
6

Тогда $AC = 36 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos\alpha$ Чистовик

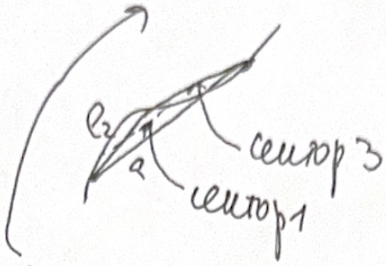
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot$

7

6. Для точки на границе подойдет сторона. Чистовик
Если точка не на границе, то либо нижняя сторона △ не пересек. многоугольник и тогда подойдет прямая $l_1 \parallel$ стороне a треуг-и меньшая ее,



либо пересекает, но тогда для первого сектора подойдет прямая $l_2 \parallel$ соот. стороне a,

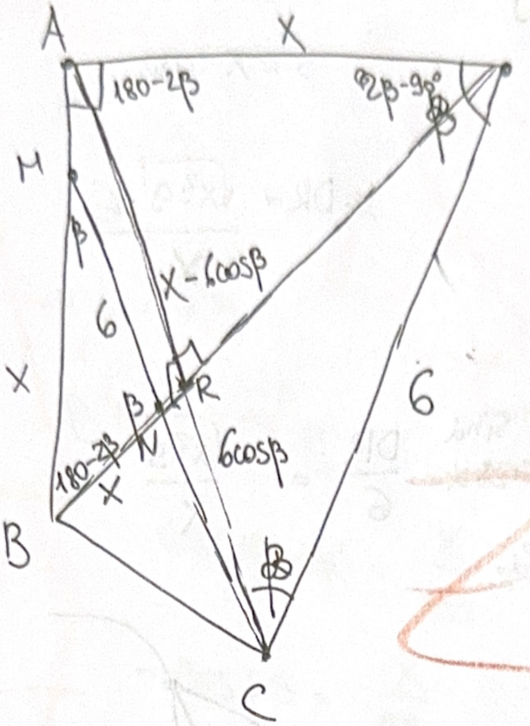


для сектора 2 тоже самое....
$\Rightarrow$ для точки любого сектора мы нашли прямую.

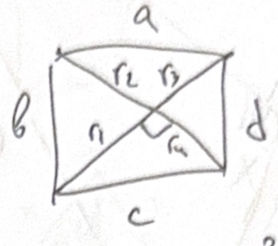
ч.т.д.

Черновик

$\sin 2\beta = \frac{DR}{X}$



$(1-\cos\beta)X^2 - 72 + 72\cos^2\beta = 0$



$a^2+c^2=b^2+d^2$

$b^2=r_2^2+r_1^2$

$c^2=r_1^2+r_4^2$

$d^2=r_4^2+r_3^2$

$a^2=r_2^2+r_3^2$

$X^2+BC^2=36+X^2ctg^2 2\beta$

$(X-6\cos\beta)^2 = X\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot AB = -Xctg2\beta$

$(X-6\cos\beta)^2 = X^2\cdot\cos^2 2\beta$ $\quad 3=\cancel{X}\cdot\cos\beta$

$X^2-12X\cos\beta+36\cos^2\beta=X^2\cdot\cos^2 2\beta$

$2X^2-\cancel{12}^{24}X\cos\beta+\cancel{36}^{72}\cos^2\beta=\frac{X^2}{\cancel{2}}(1+\cos\beta)$ $\quad \cos 2\beta=\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$

$\frac{X^2}{(1-\cos\beta)}-24\,X\cos\beta+72\cos^2\beta=0$ $\quad 3$

$1+5-2\sqrt{5}$

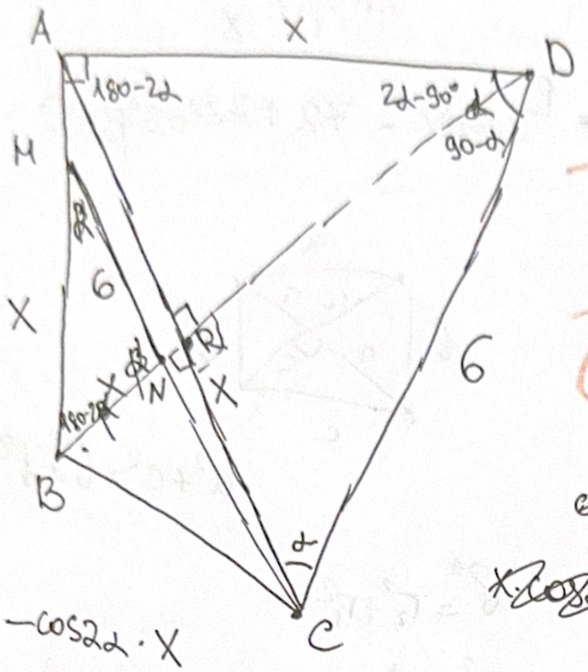
$5-2\sqrt{5}$

$3=X\cdot\cos\beta$

2

Черновик

$\alpha=\beta$



$3 = x\cdot\cos\alpha$

$DR = \dfrac{\sqrt{x^2-9}\cdot 6}{x}$

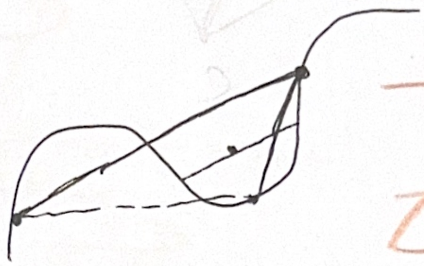
$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{DR}{6} = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

$\cancel{x\cdot\cos 2\alpha}$

$-\cos 2\alpha\cdot x$

$\sin 2\alpha = \dfrac{AR}{AB}$

$\sin(2\alpha-90^\circ) = \dfrac{AR}{x}$



$\sin 2\alpha = \dfrac{AR}{AB}$

$1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

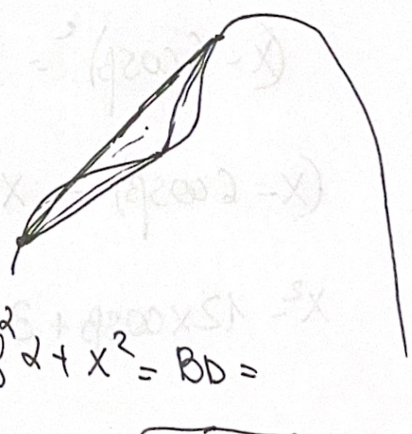
$-\cos 2\alpha = \dfrac{AR}{x}$

$\sin 2\alpha\cdot AB = -x\cos 2\alpha$

$AB = -x\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$

$CR = 6\cos\alpha$

$AR = -x\cdot\cos 2\alpha$



$x^2\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha + x^2 = BD =$

$= x\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$

$\dfrac{x^2}{\sin\alpha}$

$6x\cdot\sin\alpha = x^2\cdot\sin 2\alpha$

$3 = x\cdot\cos\alpha\cdot x\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha$

$x = 6\cos\alpha - x\cdot\cos 2\alpha$

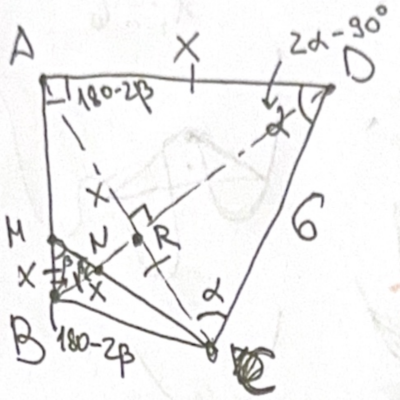
$x(\cos 2\alpha+1) = 6\cos\alpha$

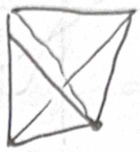
$\dfrac{3}{\cos\alpha} = \dfrac{6\cos\alpha}{\cos 2\alpha+1}$

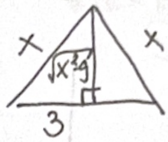
Черновик

$180-2\alpha \qquad \alpha=\beta$

$90 \qquad 2\alpha-90$







$$\cos(180-2\beta) = \frac{X}{AB}$$

$$3\cdot\sqrt{x^2-9} = x\cdot h$$

$$-\cos 2\beta = \frac{X}{AB}$$

$$h = \frac{3\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$-\cos 2\beta = \frac{AR}{X}$$

$$\frac{CR}{6} = \cos\alpha \Rightarrow CR = 6\cos\alpha$$

$$AR = x - 6\cos\alpha$$

$$\frac{AR}{x} = \frac{X}{AB} - x^2 = AB\cdot AR$$

$$-\cos 2\alpha\cdot x$$

$$-x^2 = (x-6\cos\alpha)(x\cdot\cos 2\alpha)$$

$$x = \frac{3}{\cos\alpha}$$

$$-x^2 = (x-6\cos\alpha)x\cos 2\alpha$$

$$\frac{9}{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}$$

$$-x^2 = x^2\cos 2\alpha - 6\cancel{x}\cos\alpha\cos 2\alpha$$

$$6\cos\alpha\cos 2\alpha = x(\cos 2\alpha + 1)$$

$$x = \frac{6\cos\alpha\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$6\cos^2\alpha = 3\overset{2\cos^2\alpha-1}{\cos 2\alpha} + 3$$

Черновик

1,12

1,… 6

$12 \cdot 36$

$2 \to 1+1$

$1+1$

$3 \to 1+2$

$$x^2 = \frac{72 - 72\cos^2\beta}{1-\cos\beta} = \frac{72\sin^2\beta}{1-\cos\beta} = \frac{9}{\cos^2\beta}$$

$$72(1-\cos^2\beta)\cdot\cos^2\beta = 9 - 9\cancel{\cos\beta}$$

$$\cancel{72-272}\quad 72\cos\beta - 72\cos^3\beta = 81$$

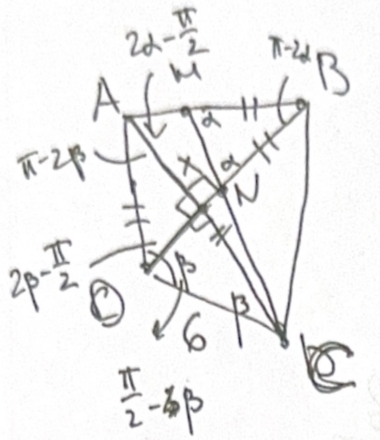
$$8\cos\beta - 8\cos^3\beta = 9$$

$$8t - 8t^3 = 9$$

$$8t^3 - 8t + \cancel{1}9 = 0$$

~~9^3+9-2~~

Черновик



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi - 2\beta + x = \pi$$

$$x = 2\beta - \frac{\pi}{2}$$

$$\pi - 2\alpha + 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{ND}{6} = \cos\beta$$

$$\sin(\pi - 2\beta) = \frac{ND}{AD} =$$

$$\sin 2\beta = \frac{6\cos\beta}{AD}$$

$$\cancel{2}\sin\beta\cancel{\cos\beta} = \frac{{}^{3}\cancel{6}\cancel{\cos\beta}}{AD}$$

$(x-c)(x-b)$

1112

1+2-1-1

$$x^3 + (23 + 10\sqrt{3})x = (10 + \sqrt{3})x^2 + 23\sqrt{3}$$

$\overline{78} \equiv 1$

8-7

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + 1$$

$\overline{ab}$

$$\overline{793a} \cdot \overline{1b09} \equiv_{11} 1$$

779

$\cancel{(7+3-9-a)\cdot 7}$

5

17
8
13 6

1 12 23 34

$$(9 + a - 7 - 3) \cdot (b + 9 - 1) \equiv_{11} 1$$

$$(a-1)(b+8) \equiv 1$$

$a \le 8$, $b \le 17$, 11

Черновик

$2^{2\sin x}+7^{2\sin x}+1=2^{\sin x}+7^{\sin x}$

$2^{\sin x}=a$, $7^{\sin x}=b$

$a^2+b^2+1=a+b+ab \quad |:a^2 \qquad a,b\geq 0$

$\cancel{a^2+b^2+1+1-2ab=a+b-ab}$

$\cancel{(a-b)^2+1=a+b-ab}$

$a>b$

$\cancel{a^2>ab}$

$\cancel{b^2>b}$

$b^2+1=b$

$b^2-b+1=0$

$b_{1,2}=1\pm\sqrt{1-} \qquad D<0$

$\cancel{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b}{a}}$

$\frac{1}{2}<2^{\sin x}<2$

$a^2+b^2+1=a+b+ab$

$a^2+b^2\geq 2ab$

$\frac{1}{7}<b<7$

$a^2+b^2+ab+1=a+b+2ab$

$\cancel{7^{\sin x}} \quad \cancel{2^{\sin x}}$

$ab+1\geq a+b$

$1<2^{\sin x}$

$a(b-1)+1-b\geq 0$

$7^{\sin x}<1$

$(a-1)(b-1)\geq 0$

$\sin x>0$

$\sin x<0$

$a,b\in[0;1]$