0 780146 070005

78-01-46-07
(182.5)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
# имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

Место проведения г. Пенза
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Солдатова Ивана Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 12:26
Возвращение 12:30

+1 доп. лист
Работа сдана в 13:41

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

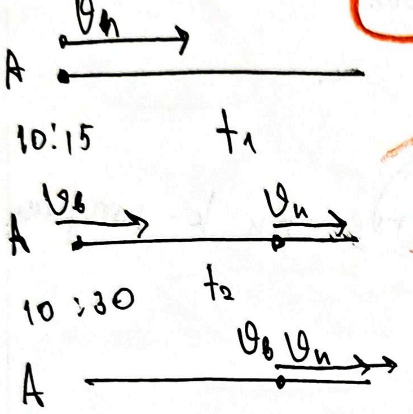
78-01-46-07 (182.5)

Чистовик

лист 1 из 8

1.

9:15




$\vartheta_n$ – скорость пешехода

$\vartheta_b$ – скорость велосипедиста

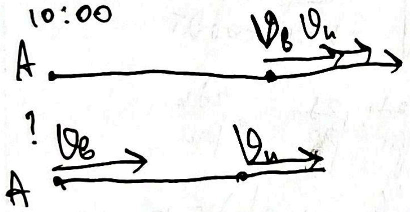
$t_1 = 1$ ч – время, которое шел пешеход без велосипедиста

$t_2 = 15$ мин $= \frac{1}{4}$ ч – время, которое велосипедист догонял пешехода

$\vartheta_n \cdot (t_1 + t_2) = \vartheta_b \cdot t_2$ (растояние, пройд. пешеходом = растояние, пройд. велосипедистом)

$\vartheta_b = \vartheta_n \cdot \dfrac{t_1 + t_2}{t_2}$

Пусть они встретились бы в 10




$t_3$ – время которое пешеход шел до встречи в 10:00

$t_3 = 45$ мин $= \frac{3}{4}$ ч.

$t_4$ – время которое велосипедисту нужно, чтобы догнать пешехода – ?

$t_4 \vartheta_b = t_3 \cdot \vartheta_n$ (растояния равны)

$t_4 \cdot \vartheta_n \cdot \dfrac{t_1 + t_2}{t_2} = t_3 \cdot \vartheta_n$ (подставим вместо $\vartheta_b$ $\vartheta_n \cdot \dfrac{t_1+t_2}{t_2}$)

$t_4 = \dfrac{t_3 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$ $\quad t_4 = \dfrac{\frac{3}{4} ч \cdot \frac{1}{4} ч}{\frac{4}{4} ч + \frac{1}{4} ч} = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{5}$ ч $=$

$= \frac{3}{20}$ ч $= \frac{9}{60}$ ч $= \frac{9 \cdot 60}{60}$ мин $=$

$= 9$ мин $\Rightarrow$

$\Rightarrow t_4 = 9$ мин $\Rightarrow$ ему понадобилось 9 минут чтобы догнать пешехода $\Rightarrow$ он выехал в 9:51.

Чистовик

лист 2 из 8

2.

$n^2 < n(n+4001) < (n+2001)^2$

при натуральном $n$

$n^2 < n^2+4001\cdot n$ $\quad$ $n^2+4001\cdot n < n^2+4002\cdot n+2001^2$

$0 < 4001\cdot n$ $\quad$ $0 < n+2001^2$

Значит если $n(n+4001)=x^2$, то $x$ представим в виде $n+k$, где $n$ и $k$ - натуральн

$n(n+4001)=(n+k)^2$

$\cancel{n^2}+4001\,n = \cancel{n^2}+2kn+k^2$

$4001\,n-2kn=k^2$

$n(4001-2k)=k^2$

$n=\dfrac{k^2}{4001-2k}$ ($4001 \neq 2k$ т.к. $k$ - натур., а $4001=2k$, когда $k=2000{,}5$)

Все $k$ при которых $\dfrac{k^2}{4001-2k} \in N$ - подходят

Пусть $k=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k} \Rightarrow k^2=p_1^{2\alpha_1}\cdot p_2^{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{2\alpha_k}$

Пусть $k \,\vdots\, p$ ($p$-простое; $p \neq 4001$) $\Rightarrow (4001-2k) \not\vdots\, p$

т.к. $4001 \not\vdots\, p$ (4001 - простое) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (4001-2k) \not\vdots\, p_1, p_2, \ldots, p_k$.

пусть $(4001-2k) \,\vdots\, p_z$ отличное от $p_1, p_2 \ldots p_k$

тогда $k^2 \not\vdots\, p_z$ ($p_z \neq p_1, p_2 \ldots p_k$)

Значит $\dfrac{k^2}{4001-2k}$ - нецелое ($p_z$ не сократится)

Значит все такие $k$ нам не подходят

(такие, что $4001-2k \,\vdots\, p_z$ отличное от $p_1, p_2 \ldots p_k$)

Значит $4001-2k=1$ (любое число (∈N) кроме 1 имеет хотя бы 1 простой делитель, мы доказали, что этот делитель не может быть $p_1, p_2 \ldots p_k \Rightarrow$ он отличен от них $\Rightarrow$ такое $k$ не подойдет $\Rightarrow 4001-2k$ только 1)

$k=2000$

$n^2+4001\,n=n^2+4000n+2000^2$

$n=2000^2$ $\quad$ $n=4000\,000$

78-01-46-07 (182.5)

Чистовик

лист 3 из 8

3.

$26! = 5^6 \cdot 2^6 \cdot$ (что-то) $\Rightarrow 26!$ оканчивается на 6 "0"

~~...~~ ~~...~~

$26! = 10^6 \cdot$ (что-то) при этом

6 – наибольшая степень пятерки в $26! \Rightarrow$

нулей только 6 (нули в конце числа дают только 10)

(пусть нулей $\geq 7 \Rightarrow 26! = 10^7 \cdot$ (что-то) $= 5^7 \cdot 2^7 \cdot$ (что-то), а $5^7$ у нас нету)

значит $c = d = 0$

$26! = 25! \cdot 26$ ~~26~~ $25! = 24! \cdot 25$

$24! \cdot 25 = 25! =$ (что-то) $x\,000000$ (6 нулей потому что в $25!$ 5 входит в 6 степени)

$\times \frac{24!}{25}$ (что-то) $\ldots$ 25

$+$ (что-то) $x000000$ $000000$

$x000000$

~~...~~ $x$ – остаток ~~какого-то~~

какого-то $y$ по mod 10 где $y$ был $\vdots 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ либо 0 либо 5, но $x \neq 0$ иначе

7 нулей на конце $\Rightarrow x = 5$ ($y \vdots 5$ потому что строка после перемножение – перемножение на 5,

$x \neq \frac{y}{10}$ т.к. десятки идут в следующий разряд)

значит $25! =$ (что-то) $5000000$

Чистовик

лист 4 из 8

3.

~~26! × (410 - 10) ... 8 000000~~

~~26 000000~~

~~26! 25! 26~~

$1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$

$7! = 5040$ $8! = 40320$

$720 \times 7 = 5040$

$5040 \times 8 = 40320$

$40320 \times 9 = 362880$

$9! = 362880$ $10! = 3628800$ $11! = 39916800$

$3628800 \times 11$
36288000
3628800
39916800

Будем считать последние 8 цифр ведь их надо найти

$39916800 \times 12$
79833600
39916800
79001600

$12! = ...79001600$

$79001600 \times 13$
237004800
79001600
027020800

$13! = ...27020800$

$27020800 \times 14$
108083200
27020800
78281200

$14! = ...78281200$

$78281200 \times 15$
391406000
78281200
74218000

$15! = ...74218000$

$74218000 \times 16$
44308000
74218000
86488000

$16! = ...86488000$

$86488000 \times 17$
60541600
86488000
70296000

$17! = ...70296000$

$70296000 \times 18$
56236800
70296000
65328000

$18! = ...65328000$

19!

$65328000 \times 19$
58795200
65328000
41232000

20!

$41232000 \times 20$
00000000
82464000
24640000

21!

$24640000 \times 21$
24640000
49280000
17440000

22!

$17440000 \times 22$
34880000
34880000
83680000

23!

$83680000 \times 23$
25040000
16736000
22640000

24!

$22640000 \times 24$
50560000
52800000
03360000

25!

$03360000 \times 25$
16800000
6720000
84000000

26!

$84000000 \times 26$
04000000
8000000
84000000

$a = 8$

$b = 4$

$c = 0$

$d = 0$

78-01-46-07 (182,5)

Чистовик

лист 5 из 8

6.

$n_1$ - участников в 1-ом отряде

$n_2$ - участников во 2-ом отряде

$\vartheta$ - производительность

$t_{p1}$ - время работы 1  $t_{p2}$ - время работы 2

$t_{n1}$ - время перерыва 1  $t_{n2}$ - время перерыва 2

$1 < t_{n2} < \frac{5}{3}$

$t_{p1} + t_{n1} = 1 + t_{p2} + t_{n2}$

$(t_{p1} + t_{n1}) \cdot n_1 \cdot \vartheta = \frac{7}{4} n_1 \cdot t_{p1} \cdot \vartheta$ (если бы 1 работали без пер.)

$t_{p1} + t_{n1} = \frac{7}{4} t_{p1}$   $(t_{p2} + t_{n2}) \cdot n_2 \cdot \vartheta = \frac{5}{3} \cdot n_2 \cdot t_{p2} \cdot \vartheta$

$t_{n1} = \frac{3}{4} t_{p1}$   $t_{p2} + t_{n2} = \frac{5}{3} \cdot t_{p2}$

$t_{n2} = \frac{2}{3} t_{p2}$ (если бы 2 работали без пер.)

$t_{n2} = \frac{2}{3} t_{p2}$   $\frac{3}{2} t_{n2} = t_{p2}$

$1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 < t_{p2} < 1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$   $\frac{4}{3} < t_{p2} < \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 2$   $\boxed{\frac{4}{3} < t_{p2} < 2}$

$t_{p1} = \frac{4}{3} t_{n1} \Rightarrow 1 \frac{4}{3} t_{n1} = 1\frac{3}{2} t_{n2} + 1$

$t_{n1} = \frac{(\frac{5}{2} t_{n2} + 1) \cdot 3}{7}$   $\frac{(\frac{5}{2} + 1) \cdot 3}{7} < t_{n1} < \frac{(\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} + 1) \cdot 3}{7} = \frac{31}{6 \cdot 7}$

$\frac{3}{2} < t_{n1} < \frac{31}{14}$

~~$n_1 \cdot \vartheta \cdot t_{p1} = n_2 \cdot \vartheta \cdot t_{p2}$ (собрали одинаково)~~

~~$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_{p2}}{t_{p1}}$   $\frac{4 \cdot 14}{3 \cdot 31} < \frac{n_1}{n_2} < \frac{2 \cdot 2}{3}$~~

~~$\frac{n_1}{n_2} < \frac{2 \cdot 2}{3}$   $n_1 = 49 - n_2$   $\frac{49 - n_2}{n_2} < \frac{4}{3}$   $4n_2 < 143 - 3n_2$~~

~~$7n_2 < 143$~~

~~$\frac{49 - n_2}{n_2} > \frac{56}{93}$   $56 n_2 > 4557 - 93 n_2$   $n_2 < 20\frac{3}{7}$~~

~~$149 n_2 > 4557$~~

~~$n_2 > 3\frac{87}{149}$~~

Чистовик

лист 6 из 8

6.

$\frac{3}{2} < t_{н1} < \frac{31}{14}$ $\qquad t_{р1} = \frac{4}{3} t_{н1}$

$\frac{3\cdot 4}{3\cdot 2} < t_{р1} < \frac{4\cdot 31}{3\cdot 14}$

$\boxed{2 < t_{р1} < \frac{124}{42}}$

$h_1 \cdot t_{р1} = h_2 \cdot t_{р2}$ (собрали поровну)

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{t_{р2}}{t_{р1}}$

$\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{42}^{14}}{\cancel{124}_{31}} = \frac{14}{31} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{2}{2} = 1$ $\qquad h_1 = 49 - h_2$

$\frac{14}{31} < \frac{h_1}{h_2}$ $\qquad \frac{h_1}{h_2} \leq 1 \Rightarrow$ $\qquad h_1 < h_2 \Rightarrow$

$h_1 < 25 \Rightarrow$

$14h_2 < 31h_1$ $\qquad \Rightarrow h_2 > 24$

$14h_2 < 31\cdot 49 - 31h_2$

$45h_2 < \cancel{33}$ 1519 $\qquad 25 \leq h_2 \leq 33 \Rightarrow$

$h_2 < 33\frac{34}{45}$ $\qquad \Rightarrow 16 \leq h_1 \leq 24$

$\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 49 \\ \hline 279 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 1519 & 45 \\ 135 & 33 \\ \hline 169 & \\ 135 & \\ \hline 34 & \end{array}$

124

Чистовик

лист 7 из 8

4.

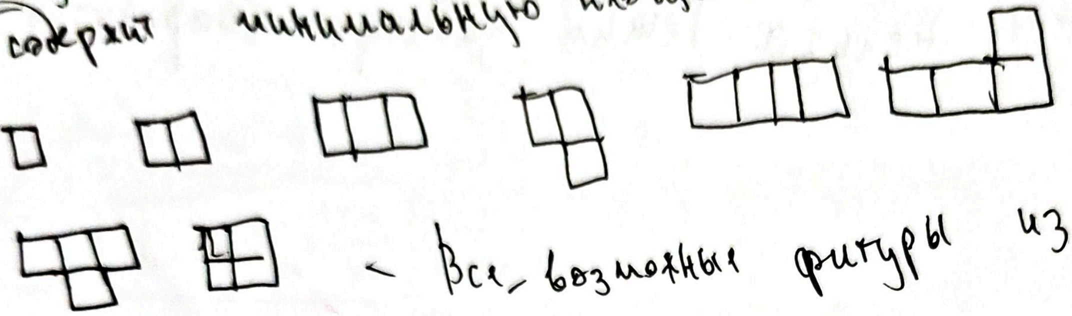
Нет, нельзя. Решим задачу от варианта

Чистовик

лист 8 из 8

5.

Пусть ~~8не шестиугольн~~ восьмиугольник содержит минимальную площадь 4.

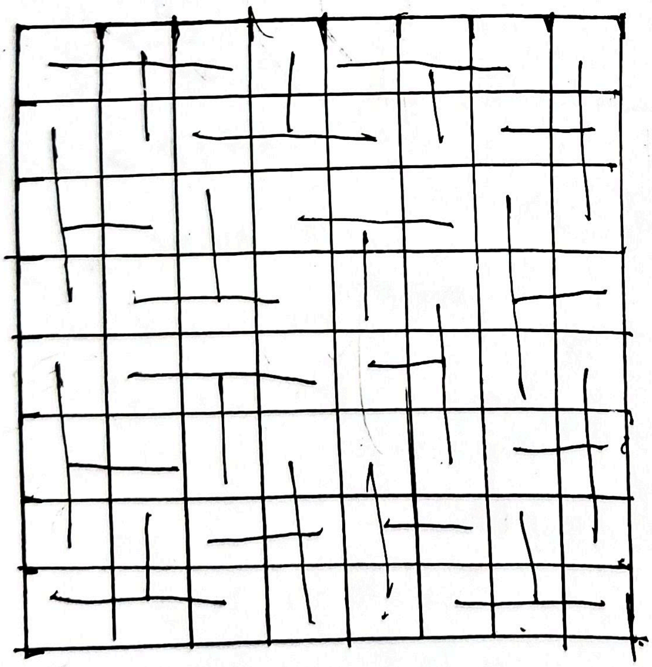


– Все возможные фигуры из клеток $\leq 4$, заметим, что у фигур из 1, 2, 3 клеток нет восьмиугольников $\Rightarrow$

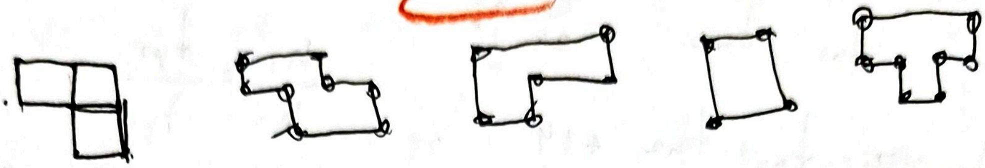
S min 4 $\Rightarrow$ # фигур максимум $\frac{64}{4} = 16$

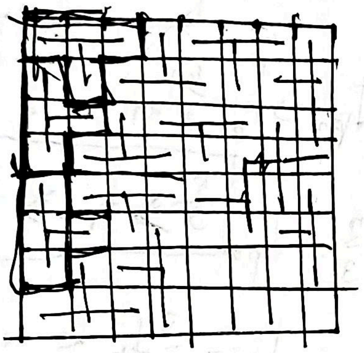
(чем меньше площадь тем больше помещается)

Пример:



Черновик





Черновик

$\cancel{\vartheta} \cdot n_1 \cdot t_{p1} = t_{p2} \cdot n_2 \cdot \cancel{\vartheta}$

$n_1 \quad \vartheta_1 \qquad n_2 \quad \vartheta_2$

$t_{p1} \quad t_{p2} \quad t_{n1} \quad t_{n2}$ 23 26 24 2

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_{p2}}{t_{p1}}$

$t_{p1} + t_{n1} + \cancel{14} = t_{p2} + t_{n2} + 14$

$14 < t_{n2} < 1\frac{1}{3}\,4$ 23, 24, 25, 26, 27

$t_{p1} = \frac{4}{3} t_{n1}$ $\frac{15 \cdot 4}{14 \cdot 3} < t_{p1} < \frac{10 \cdot 4}{7 \cdot 3}$

$(t_{p1} + t_{n1}) \cdot \cancel{n_1} \cdot \cancel{\vartheta_1} = 1\frac{3}{4} \cdot t_{p1} \cdot \cancel{n_1} \cdot \cancel{\vartheta_1}$

$1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} =$

$\boxed{\frac{10}{7} < t_{p1} < \frac{40}{21}}$

$t_{p1} + t_{n1} = 1\frac{3}{4} t_{p1}$ $1 \cdot 3$

$1\frac{4}{3} t_{n1} = 1\frac{3}{2} t_{n2}$ $\boxed{t_{n1} = \frac{3}{4} t_{p1}}$ $t_{n1} = \frac{3}{4} t_{p1} \Rightarrow t_{p1} = \frac{4}{3} t_{n1}$

$\boxed{\frac{5}{3} > t_{p2} > \frac{3}{2}}$

$\left((t_{p2} + t_{n2}) \cdot \cancel{n_2} \cdot \cancel{\vartheta_2} = \cancel{n_2} \cdot \cancel{\vartheta_2} \cdot 1\frac{2}{3} \cdot t_{p2}\right.$

$\frac{7}{3} t_{n1} = \frac{3}{2} t_{n2}$ $\boxed{t_{n2} = \frac{2}{3} t_{p2}}$ $\Rightarrow 1\frac{1}{3}\,4 < t_{p2} = \frac{3}{2} t_n < 1\frac{1}{2}\,4$

$t_{n1} = \frac{15}{14} t_{n2}$ $t_{p1} + \frac{3}{4} t_{p1} \cancel{z} = 1\frac{2}{3} t_{p2} + 14$

$\boxed{\frac{15}{14}4 < t_{n1} < \frac{\cancel{10}}{7}4}$ $\boxed{1\frac{3}{4} t_{p1} = 1\frac{2}{3} t_{p2} + 14}$

$\begin{array}{r} 63 \\ \times\ 29 \\ \hline 567 \\ 126 \\ \hline 1827 \end{array}$

$\cancel{\vartheta_1} \cdot n_1 \cdot t_{p1} = \vartheta_1 \cdot n_2 \cdot t_{p2}$ $t_{p1} = \frac{1\frac{2}{3} \cdot t_{p2} + 14}{1\frac{3}{4}}$

$\frac{63}{80} < \frac{n_1}{n_2} < \frac{7}{6}$ $n_1 \cdot t_{p1} = n_2 \cdot t_{p2}$ $\frac{23}{26} > \frac{63}{80}$

$\frac{n_1}{n_2} < \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{\cancel{10}\,2}$

$< \ldots \frac{27}{22}$ $\frac{63}{80} > \frac{\cancel{10}}{16}$

$\frac{25}{24} - \frac{26}{23}$ $\frac{7}{6}$

$n_1 \cdot \frac{1\frac{2}{3} t_{p2} + 14}{1\frac{3}{4}} = n_2 \cdot t_{p2} \;\Big|\; \cdot 1\frac{3}{4}$ $\frac{3 \cdot 21}{2 \cdot 40} < \frac{n_1}{n_2} < \frac{7}{6}$

$n_1 = t_{p2}\left(\frac{7}{4} n_2 - \frac{5}{3} n_1\right)$

$n_1 \cdot \left(1\frac{2}{3} \cdot t_{p2} + 14\right) = n_2 \cdot t_{p2} \cdot 1\frac{3}{4}$

$\frac{156}{138} \,6$ $n_1 \cdot \frac{5}{3} \cdot t_{p2} + 14 \cdot n_1 = n_2 \cdot t_{p2} \cdot \frac{7}{4}$

$\cancel{n_1 = t_{p2}\left(\frac{7}{4} n_2 - \frac{5}{3}\right)}$

$\begin{array}{r} 63 \\ \times\ 26 \\ \hline 378 \\ 126 \\ \hline 1638 \end{array}$ $\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 80 \\ \hline 00 \\ 184 \\ \hline 1840 \end{array}$

Черновик

5, 10, 15, 20, 25

5, 10, 15, 20, 25

$a : \frac{6b}{10} + 2b$

x - 8

x - 6

cd = 0

25!

9 b 000000 × 26

2×6 2
4×6 4
6×6 6
8×6 8

4557 | 149
447 | 3
87

6b ≡ 10

2b ≡ 10

120 × 6 = 720

720 × 7 = 5040

5040 × 8 = 40320

40320 × 9 = 362880

362880 × 10 = 3628800

3628800 × 11
36121800
3628800
39916800

39916800 × 12
79833600
39916800
479001600

$6a + 6b/10 \equiv_{10} c$ при b : 2

$2b \equiv_{10} d$

$6b \equiv_{10} b$

$d + c \equiv_{10}$

$6a + \frac{6b}{10} + 2b \equiv_{10}$

15 16

-2

x 0000 × 25

$5 + \frac{x \cdot 5}{10} +$

$6 + 6b/10 + 2b \equiv_{10}$

x = 8

b 9 1 2

x = 6

6 + 0 + 6 + 4

-2

8 8

0

dzyx 0000 × 25
000000
0000
000000

b = 5

4+4

$25a^2$ $49a^2$ $9b^2$ $25b^2$

-2

4

x : 2 2+4

a b → 5a - 3b 7a - 5b

6

~~a-b~~
b - a

2a - 2b = -2(b - a)

x - 2

142 336

Черновик

1. $\vartheta_н$

A

9:15 $t_1$

A $\vartheta_б$ $\vartheta_н$

10:15

$t_2$ $\vartheta_б$ $\vartheta_н$

10:30

$4001\ n = 2kn + k^2$

$n(4001 - 2k) = k^2$

$n = \frac{k^2}{4001-2k}$

$t_1 = 1ч$ $t_3 = \frac{3}{4}ч$

$t_2 = \frac{1}{4}ч$ $t_4 - ?$

$4001 = 1 \cdot 4001$

$\vartheta_б \cdot t_2 = \vartheta_н(t_1+t_2)$

$\cancel{(\vartheta_б - \vartheta_н) \cdot t_2}$

$\frac{\vartheta_б}{\vartheta_н} = \frac{t_1+t_2}{t_2}$

$\vartheta_б = \vartheta_н \cdot \frac{t_1+t_2}{t_2}$

$k = 2000$

$t_3 \cdot \vartheta_н = t_4 \cdot \vartheta_б$

$t_3 \cdot \cancel{\vartheta_н} = t_4 \cdot \cancel{\vartheta_н} \cdot \frac{t_1+t_2}{t_2}$

$n^2 < n(n+4001)$

$< (n+2001)^2$

$(4001 - p) \vdots p$

$n^2 + 4001n = n^2 + 2kn + k^2$

$t_4 = \frac{t_3 \cdot t_2}{t_1+t_2}$

$n^2 + 4001n = n^2 + 4000n + 2000^2$

9:51

$n = 4 \cdot 10^6$

$t_4 = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{4+1}{4}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{20} =$

$n(n+4001) = (n+1)^2$

$4001n$

$= \frac{9}{60}ч = 9$ мин

$\frac{k^2}{4001-2k}$

$n(n+4001)$

$n(n+4001) = (n+k)^2$

$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$k^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$

$n(n+4001) < (n+2000)^2$

$n^2 + 4001n$

$\frac{p_1^2(\ldots)}{4001 - 2 \cdot p_1}$

Чистовик

лист _ из _

4.

Нет нельзя решить ~~зох~~ задачу инвариантом