0 976969 210005

97-69-69-21
(183.1)

сдано: 12:37

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1, 9 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Чашина Ярослава Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» 04 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять)

Чистовик

№ 1

$v_в$ – скорость велосипедиста

$v_п$ – скорость пешехода

~~(10·60+30~~

~~$v_п = 15 v_в$~~

$(10\cdot 60+30-(9\cdot 60+15))\cdot v_п = (10\cdot 60+30-(10\cdot 60+15))\, v_в$

$\Downarrow$

$75\, v_п = 15\, v_в$

$v_в = 5\, v_п$

$45\cdot v_п = x\cdot v_в$

$45\cdot v_п = x\cdot 5\cdot v_п$

$x = 9$ мин.

10:00 − 9 ~~мин~~ 9:51

Ответ: в 9:51

№2

$n\cdot(n+4001) = x^2$

$x = n+Z$

$Z>0$

$n^2+4001n = n^2+2Zn+Z^2$

$Z(2n+Z) = 4001n$

$Z \vdots 4001$ или $\begin{cases} Z \not\vdots 4001 \\ 2n+Z \vdots 4001 \end{cases}$

$\Downarrow$

$Z = k\cdot 4001$

$k\cdot 4001(2n+k\cdot 4001) = 4001n$

$k\cdot(2n+k\cdot 4001) = n$

$k>0$ т.к. $Z>0$

$k \Rightarrow k\geq 1$

$k(2n+k\cdot 4001)$

$2n+4001$

значит такого не может быть.

$\Downarrow$

$2n+Z = k\cdot 4001$

$Z\cdot k\cdot 4001 = 4001n$

$n = Zk$

$2Zk+Z = k\cdot 4001$

$Z\cdot(2k+1) = k\cdot 4001$

$2k+1 \vdots 4001$

$2k+1 = 1\cdot 4001$

$Z\cdot 1 = k$

~~2z l+1=l·4001~~

Чистовик

$2zl+1=l\cdot 4001$

$\Downarrow$

$1 \vdots l \quad l \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

$l=1$

$\Downarrow$

$2z+1=4001$

$\Downarrow$

$z=2000.$

Вернёмся к изначальному уравнению

$n(n+4001)=(n+z)^2$

$\Updownarrow$

$n(n+4001)=(n+2000)^2$

$n^2+4001n=n^2+4000n+4000000$

$n=4000000$

Ответ: $\{4000000\}$

N3

2026 последовательных чисел $\Rightarrow$ $\text{Окр}(\sqrt{k})=\text{Окр}(\sqrt{k+2025})$ k-нат., т.к. Окр $\sqrt{k}$ - натуральное и их сумма натуральна.

Пусть $t=\text{Окр}(\sqrt{k})=\text{Окр}(\sqrt{k+2025})$

Это значит, что $\sqrt{k+2024}-\sqrt{k}<1$

$\sqrt{k+2024}<1+\sqrt{k}$

$\Updownarrow$

$k+2025<1+2\sqrt{k}+k$

$1+2\sqrt{k}>2025$

$\sqrt{k}>1012$

$k>1024144$

$k\geq 1024145$

$\Downarrow$

минимально возможное $k=1024145$

Ответ: 1024145

Чистовик

№4

Заметим, что при выборе любых чисел a и b и замене их на $5a-3b$ и $7a-5b$ кол-во чисел делящихся на 5 не изменится.

5 - простое число => перемножением числа не делящегося на 5 и любого другого не делящегося на 5 числа в любом случае не делится на 5.

	a	b
чёт.	$\vdots 5$	$\vdots 5$
нечёт.	$\vdots 5$	$\vdots 5$

$5a-3b \underset{5}{\equiv} -3b$

$7a-5b \underset{5}{\equiv} 2a$

=> если $a \vdots 5$, то будет 2 число $\vdots 5$

если $b \vdots 5$, то будет 1 число $\vdots 5$

если оба $\vdots 5$, то оба числа $\vdots 5$

если ни одно не $\vdots 5$, то оба числа $\not\vdots 5$

Т.е. ~~ни одно число~~ кол-во чисел $\vdots 5$ - const.

с 15 до 40 ровно 6 чисел $\vdots 5$; с 2001 до 2026 ровно 5 чисел $\vdots 5$. => Невозможно через конечное число ходов получить на доске числа 2001, ..., 2026 из чисел 15, ..., 40.

Ответ: Нет, нельзя.

№5

$(t_1-t_{01})x_1 = (t_1-t_{02}+60)x_2$

$x_1+x_2=49$

x_1, x_2 - натуральные

$60 \le t_{02} \le 80$

$t_1 x_1 = \frac{7}{4} x_1(t_1-t_{01})$

$(t_1+69)x_2 = \frac{5}{3} x_2(t_1-t_{02}+60)$

$3(t_1+69) = 5t_1-5t_{02}+300$

$3t_1+180$

$2t_1 = 5t_{02}-120$

$4t_1 = 7(t_1-t_{01})$

$7t_{01} = 3t_1$

$t_{01} = \frac{3}{7}t_1$

$\frac{4}{7}t_1 x_1 = (t_1-t_{02}+60)x_2$

$\frac{10t_{02}-240}{7}x_1 = 1{,}5t_{02} \cdot x_2$

$(20t_{02}-480)x_1 = 21t_{02} \cdot x_2$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{21t_{02}}{20t_{02}-480}$

Чистовик

подставим минимальный и максимальный t_{02} мин.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{21\cdot 60}{20\cdot 60 - 480}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1260}{720} = \frac{63}{36} = \frac{21}{12}$$

$$x_1 \le 21\cdot\frac{49}{33} = 7\cdot\frac{49}{11} = \frac{343}{11} = 31\frac{2}{11}$$

$$x_2 \ge 12\cdot\frac{49}{33} = 17\frac{8}{11}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{21\cdot 80}{20\cdot 80 - 480}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{21}{14}$$

$$x_1 \ge 21\cdot\frac{49}{35} = 3\cdot\frac{49}{5} = \frac{147}{5} = 29\frac{2}{5}$$

$$x_2 \le 14\cdot\frac{49}{35} = \frac{98}{5} = 19\frac{3}{5}$$

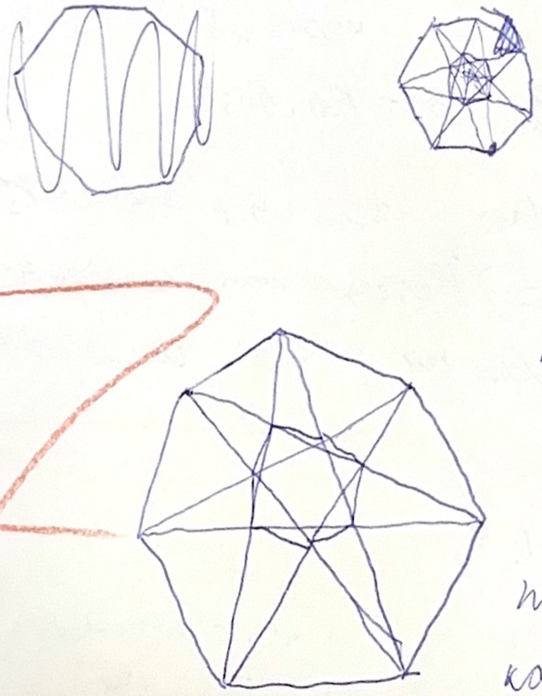
$x_1 = 31$ или 30

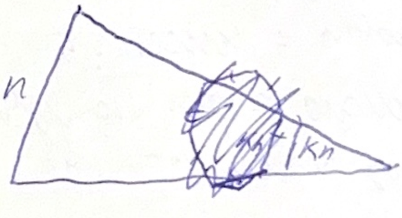
$x_2 = 18$ или 19

Ответ: 31 или 30 человек было в 1 группе

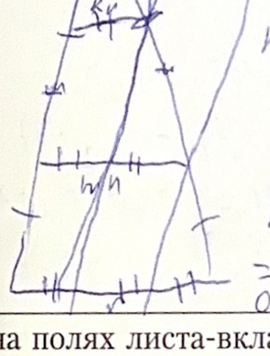
N 6

Получится правильный 7-ми угольник, т.к. равны 2 стороны и угол между ними.





площади относятся как k^2 к 1



н. е. $\frac{1}{3}$

$\Downarrow$

относится как $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ к $1 =$

$= \frac{1}{9}$ к 1

Ответ: $\frac{1}{9}$

Черновик

$z \le 2000$

$n = 2000 \Rightarrow z = 1$

$z \,\vdots\, 4001$

$2n + z = k \cdot 4001$

$z \cdot k \cdot 4001 = 4001 n$

$n = z \cdot k$

$n = z \cdot \frac{2n+z}{4001}$

$n = \frac{2zn + z^2}{4001}$

$n \,\vdots\, z$

$n \,\vdots\, \frac{2n+z}{4001}$

$n = z \cdot \frac{2 \cdot z \cdot \frac{2n+z}{4001} + z}{4001}$

$n = z \cdot \frac{z\left(\frac{4n+2z}{4001} + 1\right)}{4001}$

$(2k+1) \,\vdots\, 4001$

$n \,\vdots\, z^2$

$n = z^2 \cdot \frac{4n + 2z + 4001}{4001^2}$

$n = z^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot z \cdot \frac{2n+z}{4001} + 4001}{4001^2}\right)$

$z(2n+z) = 4001 n$

$zk = n$

$2n + z = k \cdot 4001$

$2zk + z = k \cdot 4001$

$z(2k+1) = k \cdot 4001$

$\Downarrow$

$2k+1 \,\vdots\, 4001$

$z \le 2000$

$2k + 1 = l \cdot 4001$

$z \cdot l = k$

$k = z \cdot l$

$2zl + 1 = l \cdot 4001$

$2z + \frac{1}{l} = 4001$

$1 \,\vdots\, l \Rightarrow l = 1$

$2z + 1 = 4001$

$z = 2000$

$n \cdot (n + 4001) = (n + 2000)^2$

$n^2 + 4001n = n^2 + 4000n + 4000000$

$n = 4000000$

$$\begin{array}{r} 1012 \\ \times\ 1012 \\ \hline 2024 \\ 1012 \\ 1012 \\ \hline 1024144 \end{array}$$

$a \equiv_5 -3b$

$b \equiv_5 2a$