Сдано: 16:57

0 762413 680001

76-24-13-68
(182.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Новосибирск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Мастёрова Алексея Ивановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

90 (девяносто)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

76-24-13-68
(192.8)

Задача №1

Обозначим скорость пешехода за m. До момента встречи пешехода и велосипедиста, пешеход шёл 45 минут, а велосипедист ехал 15 минут, то есть велосипедист ехал в 3 раз меньше, чем пешеход. Значит, велосипедист ехал со скоростью, в 5 раз больше, чем у пешехода, то есть со скоростью 5m.

Что бы догнать пешехода в 10:00, велосипедисту необходимо ехать в 5 раз меньше, чем пешеходу. Учитывая то, что пешеход шёл 45 минут, велосипедист должен проехать 9 минут, то есть выехать в 9:51.

Ответ: 9:51

Задача №3

Заметим, что 26! делится на 5^6 (потому что делится на $5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot25$) и на 2^6 (потому что делится на $2\cdot4\cdot6\cdot8$). Поэтому 26! делится на 10^6. Отсюда следует, что $c=d=0$. Тогда, сумма цифр в числе 26! равна $69+a+b$. По признаку делимости на 9 (число 26! делится на 9), число $69+a+b$ так же должно делиться на 9 $\Rightarrow 69+a+b \underset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow$ $a+b \underset{9}{\equiv} 3$. Учитывая то, что $0 \le a,b \le 9$, то либо $a+b=3$, либо $a+b=12$.

Заметим, что сумма цифр на чётных ~~разрядах~~ местах числа равна $30+a$, а на нечётных $39+b$. По признаку делимости на 11, ~~число~~ (число 26! делится на 11), число $39+b-30-a$ так же должно делится на 11 $\Rightarrow b-a+9 \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b-a \underset{11}{\equiv} 2$. Учитывая то, что a, $0\le a,b \le 9$, либо $b-a=2$, либо $b-a=-9$. Разберём эти 2 случая:

1. Если $b-a=-9$, то $b=0$, $a=9$ и $b+a=9$, а такого не может быть.
2. Если $b-a=2$, то $b=a+2 \Rightarrow a+b=2a+2$. Это число не может равнятся 3, а значит равняется $12 \Rightarrow a=5, b=7$.

Ответ: $a=5$, $b=7$, $c=d=0$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Зад

76-24-13-68 (182.4)

Задача №2

Заметим, что $n(4001+n) > n^2$, поэтому $n(4001+n) = (n+k)^2$, где k - какое-то натуральное число.

Отсюда следует, что $4001n + n^2 = n^2 + 2nk + k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4001n = 2nk + k^2 \Rightarrow 4001n \vdots k$. Если k взаимно просто с 4001, то $n \vdots k$. Поэтому возможны 2 случая: $k \vdots 4001$ и $n \vdots k$. Разберём эти случаи:

1. $n \vdots k$. Пусть $n = mk$, где m - натуральное число. Тогда, $4001mk = 2mk^2 + k^2 \Rightarrow 4001m = 2mk + k \Rightarrow 4001m \vdots k$ и $k \vdots m \Rightarrow$ либо $k = m$, либо $k = 4001m$.

1.1. Если $k = m$, то $4001k = 2k^2 + k \Rightarrow 2k^2 = 4000k \Rightarrow k = 2000 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = km = 2000^2$. В самом деле, $k^2 + 2nk = n + 2k^3 = n + 4000n = 4001n$.

1.2. Если $k = 4001m$, то $4001m = 8002m^2 + 4001m \Rightarrow m = 0$. Этот случай невозможен.

2. Если $k \vdots 4001$, то пусть $k = 4001t$ и $4001n = 8002nt + (4001t)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 2nt + 4001t^2$ (t - натуральное число). ~~Если~~ Очевидно, что $2nt > n$, поэтому $n \neq 2nt + 4001t^2$.

Ответ: $n = 2000^2$

Задача №4

Докажем, что количество чисел, делящихся на 5 не меняется. В самом деле:

1. Если $a \vdots 5$ и $b \vdots 5$, то и $5a - 3b \vdots 5$, и $7a - 5b \vdots 5$.
2. Если $a \vdots 5$ и $b \not\vdots 5$, то $5a - 3b \not\vdots 5$, а $7a - 5b \vdots 5$.
3. Если $a \not\vdots 5$ и $b \vdots 5$, то $5a - 3b \vdots 5$, а $7a - 5b \not\vdots 5$.
4. Если $a \not\vdots 5$ и $b \not\vdots 5$, то $5a - 3b \not\vdots 5$, и $7a - 5b \not\vdots 5$.

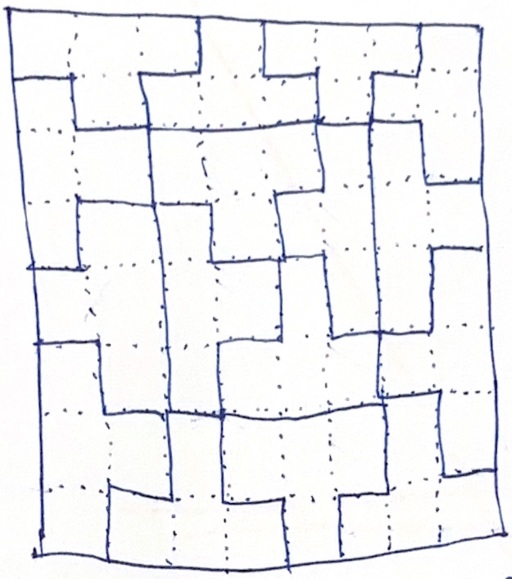
(здесь используется то, что $5a \vdots 5$ и $5b \vdots 5$).

Тогда, если изначально было 6 чисел, делящихся на 5 (15, 20, 25, 30, 35, 40), то на любом шаге их будет 6 и не может стать 5 (2005, 2010, 2015, 2020, 2025). Поэтому нельзя получить числа от 2001 до 2026.

Ответ: нельзя.

Задача №5

Заметим, что из 1 или из 2 клеток нельзя составить восьмиугольник. Так же, квадрат 8×8 не делится на равные фигуры из трёх клеток. Поэтому, каждый восьмиугольник состоит хотя бы из четырёх клеток, а всего восьмиугольников может быть не более $\frac{64}{4}=16$. Приведём пример, при котором квадрат 8×8 разбивается на 16 восьмиугольников (равных)



Ответ: 16 восьмиугольников.

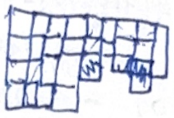
$4(4001+n) = (n+k)^2$

$4001n = 2nk + k^2$

$\vdots k$

$1.\ k \vdots 4001 \Rightarrow n = 2nk_1 + 4001k_1 \Rightarrow$

$2n \vdots k \Rightarrow n \vdots k^2 \Rightarrow 4001m = 2mk + 1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow k = 2000 \Rightarrow n = 2000^2$



92 16

v - скорость п.Ещ.

он шёл ~~75 мин~~ 1,25 часа

А велосипедист ехал в 5 раз меньше, значит $5v$.

$0{,}75 ч \cdot v = 0{,}15 ч \cdot 5v$

$60 мин \cdot 0{,}15 = 6 \cdot 1{,}5 = 3 \cdot 3 = 9$ мин

6 Og:51

$n(4001+n) = (n+k)^2 =$

$n^2+4001n = n^2+2kn+k^2$

$4001n = 2kn+k^2$

$\vdots k$

$n(4001-2k) = k^2$

1. $n \vdots k^2$

2. ~~$4001-2k \vdots k$~~, $k \vdots 4001$ ← плохо т.к. $n \vdots 4001$ и все.

$n = mk^2$

$4001m = 2km+1 \Rightarrow m=1, k = 2000$

$n = 4000000$

26!

5 10 15 20 25

1 1 1 1 2 a b

Всего 6.

$k t_2 = \frac{49 \cdot 20}{21} t_2 - \frac{20}{21} k t_2 + 28 - \frac{4}{7} k$

$\frac{41}{21} k t_2 = 49 \cdot 20 t_2 - 12k$.

$k(41 t_2 + 12) = 49 \cdot 20 t_2$

$\frac{49}{\times 4}$ 196; $\frac{49}{\times 3}$ 147

$k \leq \frac{1960}{71{,}5} \leq \frac{1960}{70} = 28$

$k \geq \frac{1470}{90} = 17$

k человек в 1 группе работали t_2 часов. скорость v

$c = d = 0$

, а 1 работали t_2 часов.

$k t_2 = (49-k)\left(\frac{20}{21} t_2 + \frac{4}{7}\right)$

~~$k \cdot t \cdot v = (49-k)(t+1) \cdot v$~~

$\frac{5}{3} k \cdot t_2 \cdot v = k \cdot (t_2 + t_1) \cdot v$

$\frac{5}{3} t = t_2 + t_1$

$1 \leq \frac{2}{3} t_2 = t_1 \leq 1\frac{1}{3} \Rightarrow 1{,}5 \leq t_2 \leq 2$

$\frac{7}{4}(49-k) t_1 v = (49-k)(t_1 + m) v$

$\frac{7}{4} t_1 = t_1 + m$

$m = \frac{3}{4} t_1$

$t_1 = \frac{20}{21} t_2 + \frac{4}{7}$

$\frac{5}{3} t_2 + 1 = t_2 + t_1 + 1 = t_1 + m = \frac{7}{4} t$

403294!6!!? 66056355 abcd0000

4 4 7 9 18 22 23 29 33 45 56 64 69

$12a - 8b \equiv a+b$

$11a - 9b \equiv 0$

12

ост. 6. $\Rightarrow a+b \underset{9}{\equiv} 3 \equiv -6$

$b = 7$

$a = 5$ или

4 9 3 1 1 2 6 5 3 5 b d

b

13 16 17 18 20 26 31 34 39+b

0 2 4 6 1 6 0 6 5 a

13 19 30+a

$9+b-a \underset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b-a \underset{11}{\equiv} 2 \equiv -9$