



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 108

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Харитонов Артема Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
« 5 » апреле 2026 года

Подпись участника
Иван -

Handwritten signature or initials in red ink.

06-49-07-28
(16'6)

Черновик

n1

A $v_1 \rightarrow$

$$v_1 \cdot \frac{5}{4} = v_2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$5v_1 = v_2$$

$$v_1 \cdot \frac{3}{4} = v_2 \cdot x$$

$$v_1 \cdot \frac{3}{4} = 5v_1 \cdot x$$

$$3 = 20x$$

$$\frac{3}{20} = x$$

9 мильн говорят \Rightarrow

англ: в 9:51

n2

4001 - p

$$n(n+4001) = x^2$$

$$f(n, n+4001) = 1 \text{ или } \frac{4001}{b^2} \quad a^2$$

1) $(n, n+4001) = 1 \Rightarrow n$ и $n+4001$ - взаимно просты

$$4001 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\begin{aligned} a+b &= 4001 \\ a-b &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a &= 4002 \\ a &= 2001 \\ b &= 2000 \end{aligned}$$

$$2001^2 = 2000^2 + 4000 + 1$$

2) $(n, n+4001) = 4001$

$$n = 4001 \cdot m$$

$$n+4001 = 4001(m+1)$$

$$n(n+4001) = m^2 \cdot 4001^2 \cdot (m+1) = x^2$$

$$= 4001^2 \cdot (m(m+1)) = x^2$$

\Rightarrow $1 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) > 1$
 $m = p_1 p_2 \dots p_n$
 \Rightarrow

$$2001^2 + 4001 = 2000^2 + 4000 \cdot 2 + 1 + 4001$$

Перевит

№3

$$26! = \underbrace{4032941611266056355}_{23} abcd0000$$

~~26!~~

$$v_5(26!) = \left\lfloor \frac{26}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{25} \right\rfloor = 5 + 1 = 6 \Rightarrow c = 0$$

$$d = 0$$

$$v_2(26!) = \left\lfloor \frac{26}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{16} \right\rfloor =$$

$$= 13 + 6 + 3 + 1 = 23$$

$$ab \quad ab000000 \quad ; \quad 256 = 2^8$$

$$\overline{ab000000} = 256 \times \textcircled{11}$$

~~0 - a + 0 - 0 + 0 - 0 + b - a + 5 - 5~~

$$ab \cdot 1000000 = 256 \times$$

~~+ 3 - 6 + 5 - 0 + 6 - 6 + 2 - 4 + 1~~

~~- 6 + 1 - 4 + 9 - 2 + 3 - 0 + 4 : 11~~

$$\textcircled{2} \quad ab \cdot 2^6 \cdot 5^6 = 2^8 \times$$

~~3 - 6 + 5 + 2 - 6 + 1 - 4 + 9 -~~

$$ab \cdot 5^6 = 2^{42} \times$$

$$5^6 y$$

~~+ b - a - 2 + 3 - 4 : 11~~

~~3 - 6 + 9 + 3 : 11~~

$$\overline{ab} \cdot 5^6 = 2 \cdot 5^6 y$$

$$\begin{matrix} 92 \\ 83 \\ 74 \\ 65 \end{matrix}$$

~~9 + b - a : 11~~

~~b - a \equiv 2~~

11

~~ab = 2 \cdot y~~

$$\textcircled{9} \quad u + 0 + 3 + 2 + 9 + 4 + 1 + 6 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 0 + 5 + 6 + 3 + 5 + 5$$

$$+ a + b + 000 \dots 0 \equiv 9$$

$$5 + 9 + 11 + u + 6 + 11 + 9 + 10 + a + b \equiv 9$$

~~27~~ + 15 + 17 + 10 + a + b \equiv 9

$$32 + 10 + a + b \equiv 9$$

$$42 + a + b \equiv 9$$

$$7 + a + b \equiv 9$$

$$a + b \equiv 2$$

$$\begin{array}{r} 5568 \overline{) 16} \\ \underline{48} \\ 76 \\ \underline{72} \\ 48 \end{array}$$

$$\textcircled{56} \begin{matrix} 55 \\ 74 \\ 83 \\ 92 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & = & 2 \\ 1 & 1 & = & 2 \\ \textcircled{20} & & = & 2 \\ 2 & 9 & = & 11 \\ 3 & 8 & = & 11 \\ 4 & 7 & = & 11 \end{matrix}$$

06-43-07-28
(161.6)

Черновики

$$26! = 4032941611266056355 ab900000$$

$$b - a + 5 - 15 + 3 - 6 + 5 + 0 + 6/6 + 2 - 1 + 1 - 6 + 1 - 4 + 9 + 2 + 3 + 4$$

$$b - a + 5 - 6 + 1 + 9 : 11 \quad a + b + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26$$

$$b - a + 9 : 11$$

$$a + b : 3$$

$$b - a \equiv 2 \equiv -9$$

$$a + b \equiv 6$$

$$b - a = 13 \cdot 2$$

$$b - a = -9$$

- 1 5
- 2 6
- 3 5
- 4 4

$$\begin{array}{r} 9 \ 7 \\ \oplus 8 \ 6 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$4 + 0 + 3 + 2 + 9 + 4 + 1 + 6 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 6 + 5 + 6 + 3 + 5 + 5 + 4 + b =$$

$$69 + a + b : 9 \quad a$$

$$a + b + 6 : 9$$

$$a + b \equiv 3$$

$$a + b \equiv 3 \equiv 12$$

- 9 3
- 0 3
- 1 2
- 2 1
- 6 6
- 3 0

$$\begin{array}{r} 55 \ 84 \ 118 \\ \oplus 58 \\ \hline 113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55 \ 82 \ 118 \\ \oplus 71 \\ \oplus 64500 \\ \oplus 72 \\ \hline 113 \end{array}$$

$$39 - ab$$

$$\begin{array}{r} 56 \ 8 \ 18 \\ \oplus a \quad b \\ \hline \end{array}$$

$$ab \rightarrow (5a - 3b)(7a - 5b) =$$

$$= 5a \cdot 7a - 25ab - 21ab + 15b^2 = 35a^2 - 46ab + 15b^2$$

$$5a - 3b \quad 7a - 5b$$

$$a + b \rightarrow 12a - 8b$$

делитель на и сокр.

$$15 + 16 + 17 + \dots + 110 = 14 + 1 + 14 + 2 + 14 + 3 + \dots + 14 + 26 =$$

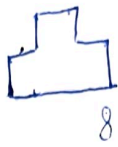
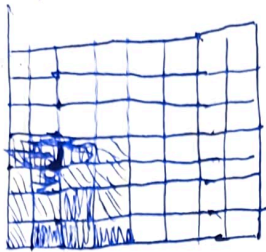
$$\approx 14 \cdot 26 + (1 + 2 + \dots + 26)$$

$$1 + 2 + \dots + 26 = \frac{26 \cdot 27}{2} =$$

$$\begin{array}{r} 14 \cdot 26 \\ \hline 14 \cdot 2 \\ \hline 140 \end{array}$$

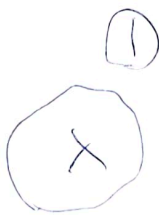
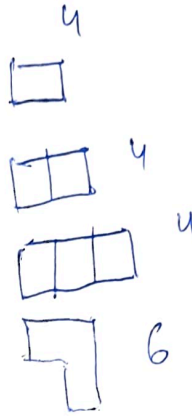
$$= 13 \cdot 27 = 351$$

Черновик

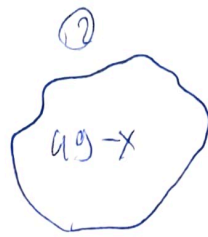


$$64:4 = 16$$

↑
объем

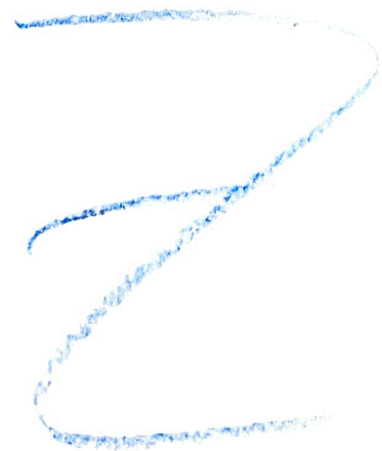


$$\begin{aligned} & \pm v_{ce} + 1 \\ & \pm ob_1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \pm v_{ce} \\ & \frac{4}{3} \pm ob_2 \geq \pm ob_2 \geq 1 \end{aligned}$$

об



$$\begin{aligned} & \cancel{x(\pm v_{ce} + 1)} \times \cancel{(\pm ob_1)} = \\ & \frac{3}{4} x (\pm v_{ce} + 1) = x \pm ob_1 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} \pm v_{ce} + \frac{3}{4} = \pm ob_1$$

$$\frac{4}{3} x \pm v_{ce} = x \pm ob_2$$

$$\frac{2}{3} \pm v_{ce} = \pm ob_2$$

$$\frac{2}{3} (49-x) \cdot \pm v_{ce} = (49-x) \cdot \pm ob_2$$

$$\frac{2}{3} \pm v_{ce} = \pm ob_2$$

$$x(\pm v_{ce} + 1) = (49-x) \pm v_{ce}$$

$$\pm v_{ce} = \frac{3}{2} \pm ob_2$$

$$x \pm v_{ce} + x = 49 \pm v_{ce} - x \pm v_{ce}$$

2 ↑

$$2x \pm v_{ce} + x = 49 \pm v_{ce}$$

$$2 \geq \pm v_{ce} \geq \frac{3}{2}$$

$$x(\pm v_{ce} + 1) = (49-x) \pm v_{ce}$$

$$x \pm v_{ce} + x = 49 \pm v_{ce} - x \pm v_{ce}$$

$$2x \pm v_{ce} + x = 49 \pm v_{ce}$$

06-49-07-28
(161.6)

Черновики 40 329416112660 56355 ~~56~~ 6800 0000

$$x(2+bx+1) = 49bx$$

$$x = \frac{49bx}{2+bx+1} = \frac{49(\cancel{bx}+1) - \frac{49}{2}}{2+bx+1} =$$

$$= \frac{49}{2} - \frac{49}{4+bx+2} = 49 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4+bx+2} \right)$$

$$2 \geq bx \geq \frac{3}{2} \quad 8 \geq 4+bx \geq 6$$

$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{4+bx+2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{49} \leq \frac{1}{8}$$

$$\frac{49}{10} \leq y \leq \frac{49}{8}$$

$$\frac{y}{10} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4+bx+2} \leq \frac{3}{8}$$

$\approx b$

$a+b$
↓

$$5a-3b \quad 2a-5b$$

$$5a-3b + 2a+5b$$

3 0 1 2 3 0 1 2 3 0 ... 3 0 1 2 3 0

$\div 4 \quad a-b$

- 25 - 1
- " "
- 25 - 12
- 26 - 3
- " "
- 26 - 0

1230 ... 1230

↓

$\div 4$

↓

...

↓

2001+...+2026

$\times 4 \quad \downarrow$

Чистовик №1

Пусть скорость пешехода = v_1 ; скорость велосипедиста = v_2 .



Пешеход шел до встречи в 1 ~~час~~ ~~минуту~~

10:30 - 9:15 $\Rightarrow \frac{5}{4}$ часа

Велосипедист 10:30 - 10:15 $\Rightarrow \frac{1}{4}$ часа

До места ~~встречи~~ встречи от точки отправления

расстояние $\Rightarrow v_1 \cdot \frac{5}{4} = v_2 \cdot \frac{1}{4}$

↑ расстояние от пешехода ← относительно велосипедиста

$$5v_1 = v_2$$

В 2 минуты пеш. шел в $\frac{3}{4}$ часа;

велос. — x часа.

$$\frac{3}{4} v_1 = v_2 x \quad \text{подставим } v_2 = 5v_1$$

$$\frac{3}{4} v_1 = 5v_1 x$$

$x = \frac{3}{20} \Rightarrow$ велосипедист выехал за $\frac{3}{20}$ часа =

9 минут до встречи. \Rightarrow он выехал в 9:51

Ответ: в 9:51.

Частовик №2

№2

$$n(n+4001) = x^2$$

н.к. 4001 простое!

$$\Rightarrow \text{НОД}(n, n+4001) = \text{НОД}(n, 4001)$$

по алг. Евклида

$$\text{н.к. } 4001 \text{ простое} \Rightarrow \text{НОД}(n, 4001) = 4001 \text{ или } 1$$

$$\Rightarrow \text{НОД} = 4001$$

$$1) = 4001. \text{ Тогда пусть } n = 4001m$$

$$n+4001 = 4001m+4001 = 4001(m+1)$$

$$n(n+4001) = 4001^2(m+1) \cdot m = x^2$$

Произведение 2 чисел квадрат, один множитель квадрат \Rightarrow 2-е ч. тоже квадрат.

Но произведение 2 натуральных чисел не может быть квадратом. Проверим.

$$2) = 1 \quad \text{Пусть } n = a^2 \quad \text{н.к. } n \text{ и } n+4001$$

взяли простое и все произведение - квадрат \Rightarrow
 \Rightarrow каждое из чисел квадрат. Пусть $n = a^2$;

$$n+4001 = b^2$$

$$b^2 - a^2 = 4001$$

$$(b-a)(b+a) = 4001 = 4001 \cdot 1$$

$$\text{н.к. } b+a > b-a \Rightarrow \begin{cases} b+a = 4001 \\ b-a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 4002 \\ b = 2001 \\ a = 2000 \end{cases}$$

$$n = 2000^2 = 4000000$$

Ответ: 4000000

Числовые ш3

ш3

$$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} a_{17} a_{18} a_{19} a_{20} a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25}} = 26!$$

По формуле Лемана:

$$v_5(26!) = \left\lfloor \frac{26}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{25} \right\rfloor = 5 + 1 = 6$$

$$v_2(26!) = \left\lfloor \frac{26}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{16} \right\rfloor = 13 + 6 + 3 + 1 = 23$$

Значит то, что в 26! встроено 5 ш3 и 2 ш3 ш3 ⇒

$$\Rightarrow 26! : 10^6 \Rightarrow c = d = 0$$

26! : 9 ⇒ сумма всех цифр : 9

$$a + 0 + 3 + 2 + 9 + 4 + 1 + 6 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 0 + 5 + 6 + 3 + 5 + 5 + a + b + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 : 9$$

$$\underline{5+9} + 5 + 8 + 8 + 6 + 11 + 8 + 5 + a + b : 9$$

: 9

$$19 + 19 + 13 + a + b : 9$$

$$1 + 1 + 4 + a + b : 9$$

$$a + b + 6 : 9$$

$$a + b \equiv 3 \pmod{9}$$

a и b цифры ⇒ они могут быть равны

12, 03, 21, 30, 93, 84, 75, 66, 57,

и 8, 39. (1)

$$\cancel{26!} : 2^8 \Rightarrow \overline{ab000000} : 2^8 \Rightarrow \overline{ab} : 2^2$$

(2)

из (1) и (2) ⇒ a и b могут быть: 12, 84, 48.

а именно $\overline{5ab} : 2^3$. $548 : 2^3 ?$

$$\begin{array}{r} 548 \overline{) 8} \\ \underline{48} \\ 68 \\ \underline{64} \\ 4 \end{array} \Rightarrow 548 \not\equiv 0 \pmod{8}$$

Число 5512

Получить из него подстроку

$$5512 : 2^4$$

$$5512 : 2^4 ?$$

$$\begin{array}{r} 5512 \quad | \quad 16 \\ - 48 \\ \hline 71 \\ - 64 \\ \hline 7 \\ - 64 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\Rightarrow 5512 \neq 2^4$$

Октябрь 2010 г.

Ответ: ~~84~~ $a=8, b=4, c=0, d=0$.

Разделены на 8 улиток из клеток.

1) из 1 клетки? 4 улит. нет

2) из 2 клеток? 4 улит. нет.

3) из 3 клеток? 4 улит. нет

6 улит. нет

4) из 4 клеток? да

\Rightarrow наименьшее количество

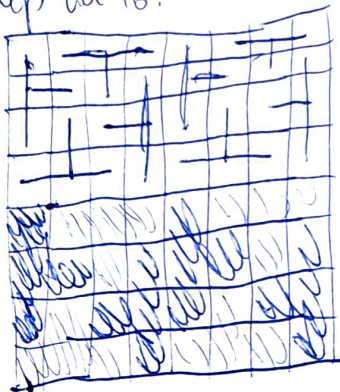
$$\frac{64}{4} = 16$$

и т. д. минимум

8 улиток

состоит из 8 и 4 клеток.

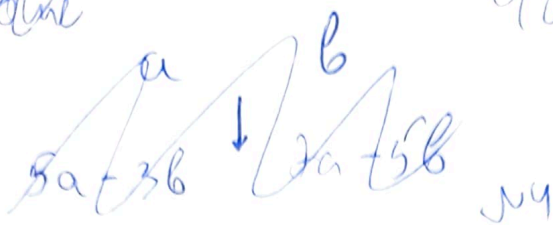
Пример на 16:



Ответ: 16.

Ирредуцируемые

Чистовые u_5



Заметим, что при сдвиге $a \pm b \rightarrow na - sb$

$n \cdot u$. В погоне мы гарантируем получить числа
 которые были начальными, но над какими
 числом было какое-то δ сдвиге. \Rightarrow

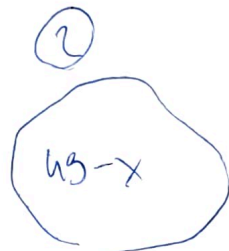
\Rightarrow сумма всех чисел u u_4 , но

$2001u + 2002u + \dots + 2016u \neq u_4$. Противоречие.

u_6



$$\begin{aligned} t_{bce} + 1 \\ t_{abed} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} t_{bce} \\ \frac{u}{3} \geq t_{abed} \geq 1 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} (u_5 - x) \cdot t_{bce} \geq (u_5 - x) \cdot t_{abed} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{bce} \geq \frac{3}{2} t_{abed} \geq \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} &\neq \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$2 \geq t_{bce} \geq \frac{3}{2}$$