0 423184 450001

42-31-84-45
(151.2)

Выход 12 18
12 22

20

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сазановича Юрия Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

80 (восемьдесят)

42-31-24-15 (161.2)

Чистовик. №1

№1.

Обозначим скорости пешехода и велосипедиста за u и $\mathcal{v}$ соответственно. В первом случае пешеход шёл 1 ч (с 9:15 до 10:15), потом его догонял велосипедист 15 мин или 0,25 ч (с 10:15 до 10:30) со скоростью сближения $\mathcal{v}-u$. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{u \cdot 1}{\mathcal{v}-u} = 0{,}25 \\ u = 0{,}25\mathcal{v} - 0{,}25u \\ 1{,}25u = 0{,}25\mathcal{v} \end{cases}$$

$\mathcal{v} = 5u$ – скорость велосипедиста в 5 раз больше скорости пешехода.

Во втором случае велосипедист выехал в какое-то время x, тогда пешеход шёл время $x - 9$ ч 15 мин или $x - 9{,}25$ ч, а велосипедист догонял его с такой же скоростью время $10 - x$, т.к. догнал он его в 10:00. Тогда:

$$\frac{u(x-9{,}25)}{\mathcal{v}-u} = 10 - x$$

$$\cancel{ux} - 9{,}25u = 10\mathcal{v} - \mathcal{v}x - 10u + \cancel{ux}$$

$$\mathcal{v}x = 10\mathcal{v} - 0{,}75u$$

$$x = \frac{10\mathcal{v} - 0{,}75u}{\mathcal{v}}$$

$$x = \frac{50\cancel{u} - 0{,}75\cancel{u}}{5\cancel{u}} = \frac{49{,}25}{5} = 9{,}85 \text{ ч} = 9 \text{ ч } 51 \text{ мин} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ велосипедисту нужно было выезжать в момент времени $\boxed{9:51}$

Ответ: в 9:51.

Чистовик. №2.

№3.

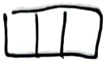
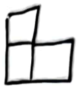
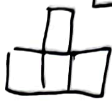
Т.к. в $26!$ присутствуют множители 3 и 9, то данное в условии число должно делиться на 3 и на 9 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ его сумма цифр должна делиться на 3 и на 9. Сумма всех цифр, кроме a, b, c, d — 69. Но для начала посмотрим на кол-во нулей в этом числе — их написано 4. Каждый ноль — это одна десятка, т.е. $2 \cdot 5$ $\Rightarrow$ сколько есть пар 2 и 5, столько и д.б. нулей. Всего в $26!$ шесть множителей 5, а множителей 2 — ещё больше $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в $26!$ как минимум 6 нулей $\Rightarrow$ д.б. ещё 2 нуля $\Rightarrow$ $\boxed{c=0}$, $\boxed{d=0}$. Далее вернёмся к условию делимости на 3 и 9: $(69+a+b+c+d) \vdots 9$ $\Rightarrow$ т.к. c и d — нули, то $(69+a+b) \vdots 9$. 69 имеет остаток 6 при делении на 9 $\Rightarrow$ $a+b$ должно иметь остаток 3 $\Rightarrow$ либо $\underline{a+b=3}$, либо $\underline{a+b=12}$. Теперь посмотрим на признак деления на 11, т.к. в $26!$ есть множитель 11. По признаку деления на 11 модуль разности между суммами цифр на чётных местах и на нечётных местах кратен 11. Сумма цифр на чётных местах — это $30+a$, а на нечётных — $39+b$ $\Rightarrow$ $|39+b-30-a| \vdots 11 \Rightarrow |9+b-a| \vdots 11$.

Тогда либо $b-a=-9$, либо $b-a=2$. В первом случае такое м.б. только если $b=0$, $a=9$, но тогда $a+b=9$, что не подходит, а во втором случае подходит вариант $b=7$, $a=5$, тогда $a+b=12$ $\Rightarrow$ $\boxed{a=5}$, $\boxed{b=7}$

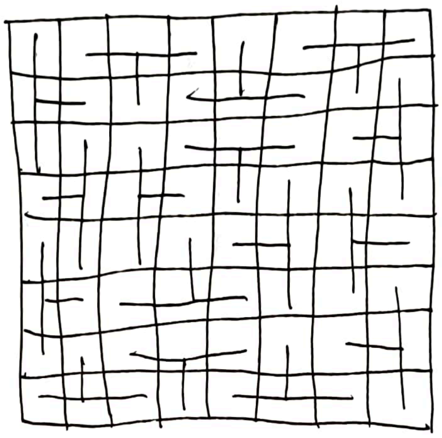
Ответ: $a=5$, $b=7$, $c=0$, $d=0$.

Чистовик №3.

№5.

Чтобы у Пети получилось наибольшее кол-во восьмиугольников, нужно, чтобы они были наименьшими по размерам. Наименьший возможный восьмиугольник — из 4-х клеточек, т.к. из 3-х клеточек м.б. только 4-угольник () и 6-угольник (). Например, можно использовать 8-угольник . Тогда, если разбить квадрат $8\cdot 8$ на такие 8-угольники, то их будет $\frac{8\cdot 8}{4}=\frac{64}{4}=\boxed{16}$, потому что в ~~вл~~ этом 8-угольнике 4 клетки.

Пример:



$\boxed{\text{Ответ: 16.}}$

№4.

Найдём разность между $7a-5b$ и $5a-3b$:

$7a-5b-5a+3b=2a-2b=2(a-b)$ — это в два раза больше разности исходных чисел a и b $\Rightarrow$ при такой замене ~~д~~ модуль разности этих двух чисел увеличивается вдвое ~~тл~~. В последовательности 15, 16, 17, ..., 40 разница между соседними числами — 1, но в последовательности 2001, 2002, 2003, ..., 2026 — тоже 1, что невозможно из написанного выше.

$\boxed{\text{Ответ: нет, нельзя.}}$

Черновик.

$$x = \frac{t - t_{n_2}}{t+1-t_{n_1}} y$$

$$y\left(\frac{t-t_{n_2}}{t+1-t_{n_1}} + 1\right) = 49$$

$$\frac{t-t_{n_2}+t+1-t_{n_1}}{t+1-t_{n_1}} = \frac{49}{y}$$

$$\frac{59\cdot 6}{21\cdot 17} = \frac{59\cdot 2}{7\cdot 17} = \frac{118}{119}$$

$$\frac{2t-t_{n_1}-t_{n_2}+1}{t+1-t_{n_1}} = \frac{49}{y}$$

$$y < 49 \Rightarrow \frac{49}{y} > 1$$

$$\frac{5}{2} \le t \le \frac{10}{3}\ z$$

$$\frac{3}{2} \le t_{n_1} \le \frac{13}{7}\ z$$

$$1 \le t_{n_2} \le \frac{4}{3}\ z$$

$$\frac{31\cdot 14}{6\cdot 23} = \frac{31\cdot 7}{3\cdot 23} = \frac{217}{69} = 3\frac{10}{69}$$

$$\frac{21}{} \le 2t - t_{n_1} - t_{n_2} + 1 \le \frac{20}{3} - \frac{3}{2} - \cancel{1} + \cancel{1}$$

$$\frac{10}{2} - \frac{13}{7} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{210-78-56+42}{42} = \frac{118}{42} = \frac{59}{21} = 2\frac{17}{21}$$

$$\frac{40}{6} - \frac{9}{6} = \frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{2} + 1 - \frac{13}{7} \le t+1-t_{n_1} \le \frac{10}{3} + 1 - \frac{3}{2} = \frac{20+6-9}{6} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$$

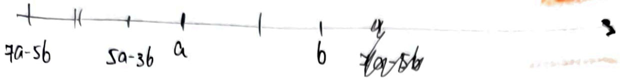
$$\frac{35+14-26}{14} = \frac{23}{14} = 1\frac{9}{14}$$

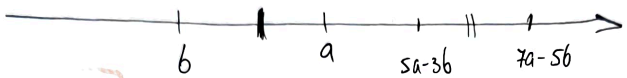
$$\frac{59}{21} \le 2t - t_{n_1} - t_{n_2} + 1 \le \frac{31}{6}$$

$$\frac{23}{14} \le t+1-t_{n_1} \le \frac{17}{6}$$

$$\frac{118}{119} \le \frac{2t-t_{n_1}-t_{n_2}+1}{t+1-t_{n_1}} \le 3\frac{10}{69}$$

черновик.





№6.

$x+y=49$

$\omega_1=\omega x$

$\omega_2=\omega y$

$\cancel{\omega_1+\omega_2=\omega(x+y)=49\omega}$

	I гр.	II гр.
кол-во чел.	x	y
кол-во мусора	n	n
время, ч	$t+1$	t
перерыв, ч	?	$1\le t_{n_2}\le 1\frac{1}{3}$
α	$1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$	$1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

$\omega=const$

$$\frac{t+1}{t+1-t_{n_1}}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{t}{t-t_{n_2}}=\frac{5}{3}$$

$3t=5t-5t_{n_2}$

$5t_{n_2}=2t$

$t=2{,}5t_{n_2}$

$2{,}5\le t\le 3\frac{1}{3}$ ч $\Rightarrow 3{,}5\le t+1\le 4\frac{1}{3}$ ч

$4t+4=7t+7-7t_{n_1}$

$7t_{n_1}=3t+3$

$7t_{n_1}=3(t+1)$

$t+1=\frac{7}{3}t_{n_1}\Rightarrow 1{,}5\le t_{n_1}\le 1\frac{6}{7}$ ч

$\cancel{\omega}(t+1-t_{n_1})x=\cancel{\omega}(t-t_{n_2})y$

$xt+x-xt_{n_1}=yt-yt_{n_2}$

Черновик.

№3.

$26! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26 =$

$= \underbrace{40329416112660}_{45}\,\underbrace{56355}_{24}\,\underset{5700}{abcd}0000$

$6 \pmod 9$

$(a+b+24) \vdots 9$

$(a+b) \vdots 3, \quad (a+b) \equiv 3 \pmod 9$

$a+b=3$ или $a+b=12$

ч: $30+a$

н: $39+b$

$|39+b-30-a| \vdots 11$

$|9+b-a| \vdots 11$

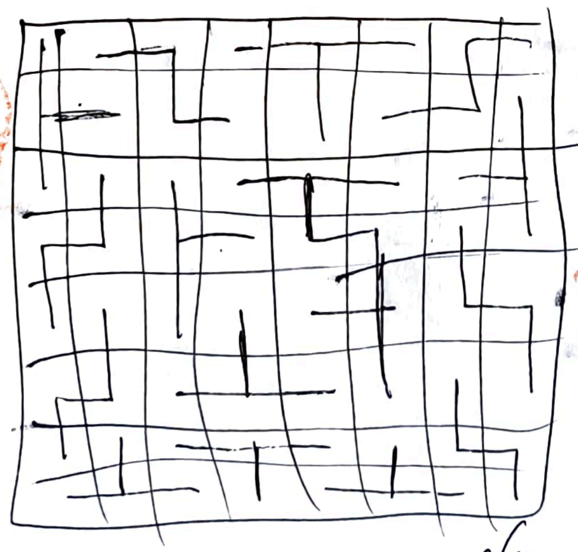
7 5

$|30+a-39-b| \vdots 11$

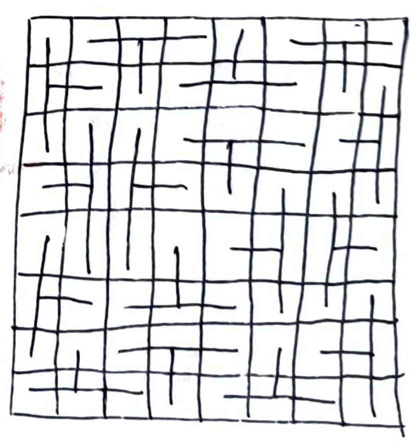
$|a-b-9| \vdots 11$

$\overline{abcd} = \overline{5700}$

№5.



$\boxed{16}$



№4.

$7a-5b-5a+3b = 2a-2b = 2(a-b)$

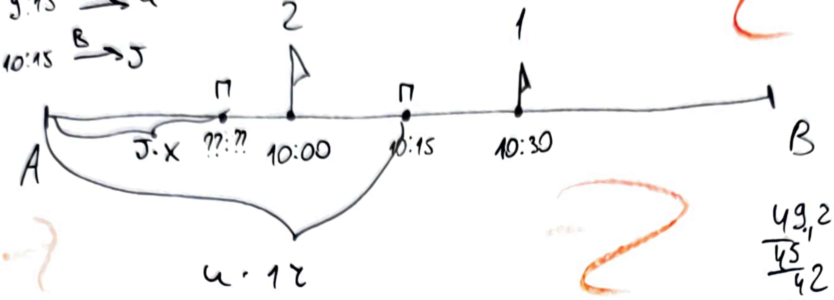
$a, b \to 7a-5b,\ 5a-3b.$

Черновик.

№1.

$9{:}15 \quad П \xrightarrow{} u$

$10{:}15 \quad В \xrightarrow{} \vartheta$



$\vartheta_{сбл} = \vartheta - u$ $\qquad$ 15 мин = 0,25ч

$$\frac{u \cdot 1ч}{\vartheta - u} = 0{,}25ч$$

$$\frac{u}{\vartheta - u} = 0{,}25$$

$$u = 0{,}25\vartheta - 0{,}25u$$

$$1{,}25u = 0{,}25\vartheta$$

$$\vartheta = 5u$$

$$\frac{\vartheta(x-9{,}25)}{\vartheta - u} = 10 - x$$

$$\vartheta x - 9{,}25\vartheta = 10\vartheta - \vartheta x - 10u + ux$$

$$x(2\vartheta - u) = 10\vartheta + 9{,}25\vartheta - 10u$$

$$x = \frac{19{,}25\vartheta - 10u}{2\vartheta - u} = \frac{86{,}25\cancel{u}}{9\cancel{u}} = \frac{86\frac{1}{4}}{9} = \frac{345}{36} =$$

$$= 9\frac{21}{36} = 9\frac{7}{12}ч = 9ч\ 35\ мин \Rightarrow \boxed{9{:}35}$$

$$\frac{u(x-9{,}25)}{\vartheta - u} = 10 - x$$

$$\cancel{ux} - 9{,}25u = 10\vartheta - \vartheta x - 10u + \cancel{ux}$$

$$\vartheta x = 10\vartheta - 0{,}75u$$

$$x = \frac{50\cancel{u} - 0{,}75\cancel{u}}{5\cancel{u}} = \frac{49{,}25}{5} = 9{,}85ч = 9\frac{17}{20}ч = \boxed{9{:}51}$$

$49{,}25 : 5 = 9{,}85$
45
42
40
25
25
0

$19{,}25 \times 5 = 96{,}25$

$86{,}25 : 9 = 9{,}58333\ldots$
81
52
45
75
72
30
27
30…