+1 ~~~

64-24-58-16
(163.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10E-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

~~по математике~~

по ~~по~~ математике
профиль олимпиады

Баркова Егора Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«5» апреля 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять)

54-24-58-16 (18:24)

Черновик
№1

Найти число реш-й ур-ия на [-3,15 ; 314]

$$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$$

Решение:

Замена:

$t=\sin x,\ t\in[-1;1]$

$$3^{2t}+5^{2t}+1=3^t\cdot5^t+3^t+5^t$$

~~Замена:~~

~~$3^t=a,\ 5^t=b$~~

~~$3^t(3^t-5^t)$~~

~~$3^t(3^t-1)+5^t(5^t-3^t)$~~

~~$a^2+b^2+1=ab+a+b$~~

$$(3^t)^2+(5^t)^2+1=3^t\cdot5^t+3^t+5^t$$

$a^2+2ab+b^2-3ab+1=a+b$

$(a+b)^2-3ab+1=a+b$

~~x^2-3y~~

$x^2-x-3y+1=0$

~~$D=1+12y$~~

$(\sqrt{2})^3$

$\cancel{2}+\cancel{22}+\cancel{10\sqrt{2}}-\cancel{10\sqrt{2}}-\cancel{2}-$

$-\cancel{22}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{2}$ - делит корень ур-ия

$8+44+20\sqrt{2}-40-4\sqrt{2}-$

$-22\sqrt{2}$

Делители $(-22\sqrt{2})$:

$\pm1;\ \pm2;\ \pm\sqrt{2}$

$1+22+10\sqrt{2}-10-\sqrt{2}-22\sqrt{2}=0$

$-1-22-10\sqrt{2}-10-\sqrt{2}-22\sqrt{2}=0$

№2

$$x^3+(22+10\sqrt{2})x-(10+\sqrt{2})x^2-22\sqrt{2}=0$$

~~$x^3-10x^2+\sqrt{2}x^2+22x+10\sqrt{2}x-22\sqrt{2}=0$~~

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	$-10-\sqrt{2}$	$22+10\sqrt{2}$	$-22\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	-10	22	0

$\Rightarrow x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

$=(x-\sqrt{2})(x^2-10x+22)=0$

Черновик

$5a-3b+7a-5b=$

$=12a-8b \vdots 2$

$\frac{D}{4}=25-22=3$

$x_1=5+\sqrt{3}$

$x_2=5-\sqrt{3}$

$\sum_{1-12} S_1=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot \cancel{26}^{13}=$

$=65\cdot 13$

$(x-\sqrt{2})(x-5-\sqrt{3})(x-5+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=5+\sqrt{3} \\ x=5-\sqrt{3} \end{array}\right.$

$x\cos\alpha=6$

Пусть

$a=\sqrt{2}$

$b=5+\sqrt{3}$

$c=5-\sqrt{3}$

тогда:

$a=\sqrt{2}+1$

$b=6+\sqrt{3}$

$c=6-\sqrt{3}$

$S_2=\frac{2001+2026}{2}\cdot$

$\cancel{x}=\sqrt{x^2+144-24x\cos\alpha}$

$V=a\cdot b\cdot c=(\sqrt{2}+1)(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})=(\sqrt{2}+1)(36-3)=$

$=33\sqrt{2}+33$

№1

11-13 11-13

4-13 4-13

$(3^t)^2+(5^t)^2+1=3^t\cdot 5^t+3^t+5^t$

Замена:

$a=3^t,\ a\in[-\frac{1}{3};3]$

$b=5^t,\ b\in[-\frac{1}{5};5]$

$S_1=\frac{20+45}{2}\cdot \cancel{26}^{13}=$

$=65\cdot 13$

$S_2=\frac{2001+2026}{2}\cdot \cancel{26}^{13}=$

$=4027\cdot 13$

$a^2+b^2+1=a(b+1)+b$

$a^2-(b+1)a+b^2-b+1=0$

$D=(b+1)^2-4(b^2-b+1)=b^2+2b+1-4b^2+4b-4=-3b^2+6b-3=$

$=-3(b^2-2b+1)=-3(b-1)^2$

$D=0$ тогда и только тогда, когда $b=1$. Иначе $D<0$ и корней нет $\Rightarrow b=1$. Тогда:

64-24-58-16 (163.4)

Черновик

$\cancel{a}^2$

$a = \frac{b+1}{2} = 1$

Обр. замена:

$\cancel{3^t = 1}$, $\cancel{5^t = 1}$ $\begin{cases} 3^t = 1 \ (1) \\ 5^t = 1 \ (2) \end{cases}$

(1) $t = 0$

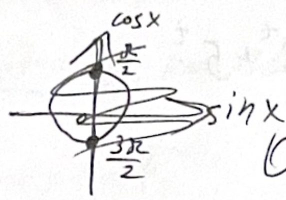
(2) $t = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$

Обр. замена:

$\sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



$x \cos\alpha = 6 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{6}{x}$

$\cos\alpha = \frac{BO}{BC}$

$BO = BC \cdot \cos\alpha = \frac{12 \cdot 6}{x} = \frac{72}{x}$

$OD = x - \frac{72}{x} = \frac{x^2 - 72}{x}$

$OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{12^2 - \frac{12^2 \cdot 6^2}{x^2}} = 12\sqrt{- \frac{35}{x^2}}$

$-3{,}15 \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 314$

$\pi \approx 3{,}141593 \Rightarrow -\cancel{\pi} \le -\pi$

$\Rightarrow \pi \le 3{,}15 \ |\cdot(-1)$

$-\pi \ge -3{,}15$

$\Rightarrow \pi > 3{,}14 \ |\cdot 100$

$100\pi > 314$

$-\pi \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 100\pi \ |:\pi$

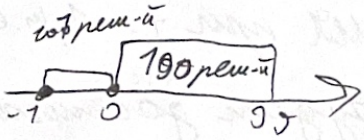
$-1 \le \frac{1}{2} + k \le 100 \ |\cdot 2$

$-2 \le 1 + 2k \le 200 \ |-1$

$-3 \le 2k \le 199 \ |:2$

$-\frac{3}{2} \le k \le \frac{199}{2} \Rightarrow$ ~~ИЛО~~ $k \in \mathbb{Z}$

~~$-\frac{3}{}$~~ $\Rightarrow \left[-\frac{3}{2}\right] + 1 \le k \le \left[\frac{199}{2}\right]$



$-1 \le k \le 99 \Rightarrow$ Всего реш-й: ~~99-(-1)~~ $99 - (-1) + 1$

~~Всего~~

Чистовик
Лист №1
№1

Найти число реш-й ур-ия на отрезке $[-3{,}15; 314]$

$$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$$

Решение:

Замена:

$t=\sin x$
$\sin x\in[-1;1]$ $\Rightarrow t\in[-1;1]$

$$(3^t)^2+(5^t)^2+1=3^t\cdot5^t+3^t+5^t$$

Замена:

$a=3^t$
$b=5^t$

$y=3^t$ – показательная функция, основание которой больше 1, а значит она монотонно возрастает $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ минимальное значение при $t\in[-1;1]$ будет достигаться при $t=-1$, т.е. $a_{min}=3^{-1}=\frac{1}{3}$, а максимальное значение будет достигаться при $t=1$, т.е. $a_{max}=3^1=3$.

Таким образом, $a\in\left[\frac{1}{3};3\right]$

Аналогично, $b_{min}=5^{-1}=\frac{1}{5}$; $b_{max}=5^1=5$

$b\in\left[\frac{1}{5};5\right]$

$$a^2+b^2+1=ab+a+b$$

Решим данное ур-ие как квадратное относительно a

Чистовик

Лист №2

№1 (продолжение)

$a^2-(b+1)a+b^2-b+1=0$

$D=(b+1)^2-4(b^2-b+1)=b^2+2b+1-4b^2+4b-4=-3b^2+6b-3=$

$=-3(b^2-2b+1)=-3(b-1)^2$

$(b-1)^2\geq 0 \,|\cdot(-3)\ \forall b\in[\frac{1}{5};5]$

$-3(b-1)^2\leq 0\quad \forall b\in[\frac{1}{5};5] \Rightarrow$ ~~корни существуют~~

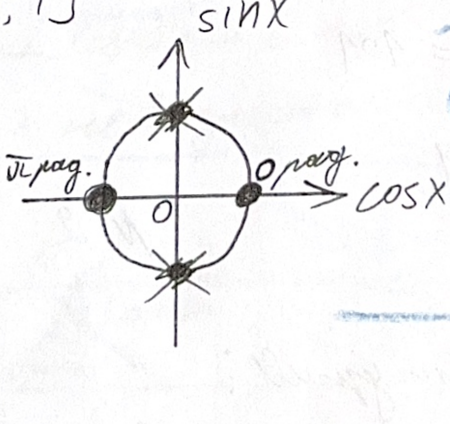
$\Rightarrow$ решения существуют тогда и только тогда, когда $D=0$, то есть $b=1$. Тогда:

$\begin{cases} a=\frac{b+1}{2}=\frac{1+1}{2}=1 \\ a\in[\frac{1}{3};3] \end{cases} \Rightarrow a=1$

Обр. замена:

$\begin{cases} 3^t=1 \ (1) \\ 5^t=1 \ (2) \\ t\in[-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=0 \\ t\in[-1;1] \end{cases} \Rightarrow t=0$

$(1)\ t=0 \qquad (2)\ t=0$



Обр. замена:

$\sin x=0$

$x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$-3{,}15\leq \pi k\leq 314$

$\pi\approx 3{,}141593 \Rightarrow \pi<3{,}15 \,|\cdot(-1)$

$-\pi>-3{,}15$

~~Чистов~~

Чистовик

Лист №3

№1 (продолж.)

$\pi \approx 3,141593 \Rightarrow \pi > 3,14 \mid \cdot 100$

$100\pi > 314$

$\left.\begin{array}{l} -3,15 \leq \pi k \leq 314 \\ -\pi > -3,15 > -2\pi \\ 100\pi > 314 > 99\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -\pi \leq \pi k \leq 99\pi \mid : \pi$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 \leq k \leq 99 \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow k \in \{-1; 0; \ldots; 99\}$

Количество значений равно длине интервала от -1 до 99, к которой прибавлена 1, так как -1 и 99 мы ~~бедре~~ берём включительно. т.е.:

Число решений ур-ия на ~~отрезк~~ отрезке $[-3,15; 314]$ равно:

$99-(-1)+1 = 101$

Ответ: 101.

№2

Дано:

a, b, c – корни ур-ия:

$x^3 + (22+10\sqrt{2})x = (10+\sqrt{2})x^2 + 22\sqrt{2}$

Найти:

Объём пр. параллелепипеда со сторонами $a+1$, $b+1$, $c+1$.

64-24-58-16
(1634)

Чистовик

лист №9

№5 (продолж.)

Н и Ч → 2Н

Ч и Ч → 2 Ч

Н и Н → 2 Ч

было:

13 Ч и 13 Н

надо получить:

13 Ч и 13 Н

Из чётного числа можно получить нечётное, только если объединить его с нечётным

~~Тогда~~ Допустим мы сделали данную операцию (а ~~без неё~~ она необходима). Получаем:

12 Ч и 14 Н

Нам нужно добавить нечётное кол-во чётных чисел, а это сделать невозможно => нет, нельзя

Ответ: нельзя.

№6

2 бросок \ 1 бросок	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

а) 1 случ:

Аня выбила 3 очка:

$P_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} = \cancel{\frac{1}{632}} =$

2 случ.:

Аня выбила 4 очка:

$P_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

См. Чистовик лист № 10 № 6 (продолж.)

3 случ.:

Аня выбила 5 очков:

$P_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{36}$

4 случ.:

Аня выбила 6 очков:

$P_3 = \frac{1}{12} \cdot \frac{10}{36}$

5 случ.:

Аня выбила 7 очков:

$P_4 = \frac{1}{12} \cdot \frac{15}{36}$

6 случ.:

Аня выбила 8 очков:

$P_5 = \frac{1}{12} \cdot \frac{21}{36}$

7 случ.:

Аня выбила 9 очков:

$P_6 = \frac{1}{12} \cdot \frac{26}{36}$

8 случ.:

Аня выбила 10 очков:

$P_7 = \frac{1}{12} \cdot \frac{30}{36}$

9 случ.:

Аня выбила 11 очков:

$P_8 = \frac{1}{12} \cdot \frac{33}{36}$

Чистовик
лист №11
№6 (продолж.)

10 случ.:

Аня выбила 10 12 очков:

$$P_9 = \frac{1}{12}\cdot\frac{35}{36}$$

Итого:

$$P_\Sigma = P_1+P_2+\ldots+P_9 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{36}+\frac{\overset{4}{}\ \ 3\overset{10}{+}6\overset{20}{+}10\overset{35}{+}15\overset{56}{+}21\overset{82}{+}26\overset{112}{+}30\overset{145}{+}33\overset{180}{+}35}{36}\right) =$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{180}}}{12\cdot\cancel{36}} = \frac{5}{12}$$

Ответ: а) $\frac{5}{12}$.

Чистовик
лист №4
№2 (продолж.)

Решение:

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

Воспользуемся теоремой Безу: выпишем множители свободного члена:

$\pm 1; \pm\sqrt{2}; \pm 2; \pm 11; \pm 11\sqrt{2}; \pm 2\sqrt{2}; \pm 22\sqrt{2}; \pm 22$

Проверим поочерёдно каждый из множителей:

$x=1$:

$1-10-\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}-22\sqrt{2}\neq 0 \Rightarrow x=1$ - не подходит

$x=-1$:

$-1-10-\sqrt{2}-22-10\sqrt{2}-22\sqrt{2}\neq 0 \Rightarrow x=-1$ - не подходит

$x=\sqrt{2}$:

$(\sqrt{2})^3-(10+\sqrt{2})(\sqrt{2})^2-(22+10\sqrt{2})\sqrt{2}-22\sqrt{2}=0 \quad |:\sqrt{2}$

$\cancel{2}-\cancel{10\sqrt{2}}-\cancel{2}+\cancel{22}+\cancel{10\sqrt{2}}-\cancel{22}=0$ - верно $\Rightarrow x=\sqrt{2}$ - подходит - корень данного ур-ия

Разделим данный многочлен на $(x-\sqrt{2})$ по схеме Горнера:

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	$-10-\sqrt{2}$	$22+10\sqrt{2}$	$-22\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	-10	22	0
	x^2	x^1	x^0	x^{-1}

← коэффициенты при x сверху

~~в каждом столбце~~

← коэффициенты при x снизу

Получаем:

$(x-\sqrt{2})(x^2-10x+22)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x^2-10x+22=0 \ (1) \end{array}\right.$

(1) $\frac{D}{4}=25-22=3$

$\left[\begin{array}{l} x_1=5+\sqrt{3} \\ x_2=5-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Чистовик
лист №5
№2 (продолж.)

~~Итого:~~

$\left[\cancel{x=\sqrt{2}} \right.$

$$\begin{array}{l|l} x^3-10x^2-\sqrt{2}x^2+22x+10\sqrt{2}x-22\sqrt{2} & x-\sqrt{2} \\ \hline -\ x^3-\sqrt{2}x^2 & x^2-10x+22x \\ \quad -10x^2+22x+10\sqrt{2}x & \\ \quad -\ -10x^2+10\sqrt{2}x & \\ \qquad -22x-22\sqrt{2} & \\ \qquad -\ 22x-22\sqrt{2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x-\sqrt{2})(x^2-10x+22)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x^2-10x+22=0 \ (1) \end{array}\right.$

(1) $\frac{D}{4}=25-22=3$

$x_1=5+\sqrt{3}$

$x_2=5-\sqrt{3}$

$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=5+\sqrt{3} \\ x=5-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Пусть $a=\sqrt{2}$, $b=5+\sqrt{3}$, $c=5-\sqrt{3}$

тогда: $a+1=\sqrt{2}+1$, $b+1=6+\sqrt{3}$, $c+1=6-\sqrt{3}$

Обозначим объём параллелепипеда за V, тогда:

$V=(a+1)(b+1)(c+1)=(\sqrt{2}+1)(6-\sqrt{3})(6+\sqrt{3})=(\sqrt{2}+1)(36-3)=$
$=33\sqrt{2}+33$

Ответ: $33\sqrt{2}+33$.

Черновик

$x^3-10x^2-\sqrt{2}x^2-22x-10\sqrt{2}x-22\sqrt{2} \;\big|\; x-\sqrt{2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2-10x$

$-\;x^3-\sqrt{2}x^2$

$-\cancel{10x}\quad -10x^2-22x-10\sqrt{2}x$

$-\;-10x^2+10\sqrt{2}x$

$x=2\beta-90^\circ$

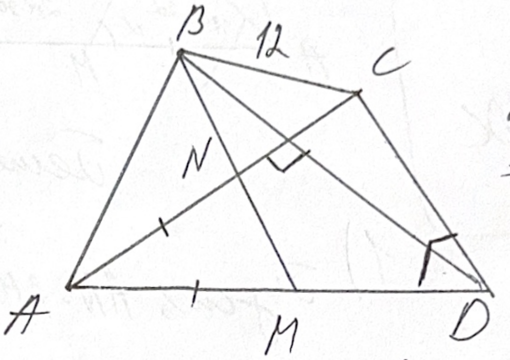
$\beta=90^\circ-\beta+x$

4089×2900

$4089 \times 29 = 36801 + 8178 = 118581$

$\beta=\alpha$

$180^\circ-2\beta+2\alpha=\cancel{180^\circ}$



$AM=AN=BD=DC=$
$=x$

Дано:

ABCD

$BC=12$

$AC\perp BD$

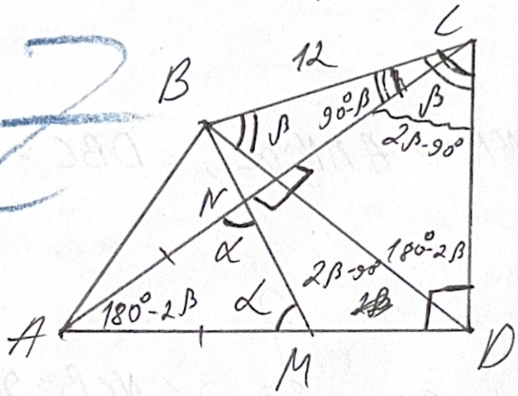
$M\in AD$

$MB\cap AC=N$

$AM=AN=BD$

$DB=DC$

S_{ABCD} - ?



$11858100 \,|\, 11$

1078009

-11, 85, -77, 88, -88, 100, -100, 1

$\times\; 4a89$
$\quad 29$

$a\in(0;10)$

$a\in N$

$b\in(0;10)$

$b\in N$

$\times\; 4a89$
$\quad 290b$

$\cancel{4ba\,b8b9b}$

$\cancel{81}$

$\cancel{4\cdot1000+a\cdot100+8}\quad (4000+100a+89)(2900+b)=$

$=(4089+100a)(2900+b)=11858100+4089b+290000a+$

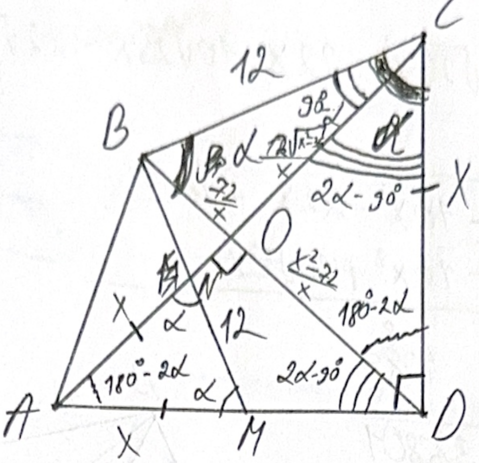
$4089b+290000a+100ab\equiv 0 \pmod{11}$

$100ab\equiv 1 \pmod{11}$

Чистовик
№ 3 лист № 6

Дано:
$ABCD$
$AC \perp BD$
$\angle D = 90°$
$M \in AD$
$MB \cap AC = N$
$AM = AN = BD = DC$
$BC = 12$

S_{ABCD} - ?



Решение:

1) Пусть $AN = AM = BD = DC = X$

2) Пусть $\angle ANM = \angle AMN = \alpha$, $\angle DBC = \angle BCD = \beta$

3) $\triangle BNC$:

$\left.\begin{array}{l}\angle BNC = 90° \\ \angle BNC + \angle NBC + \angle BCN = 180° \\ \angle NBC = \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \angle NCB = 90° - \beta$

4) $\left.\begin{array}{l}\angle BCN + \angle DCN = \beta \\ \angle NCB = 90° - \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \angle DCN = \beta - 90° + \beta = 2\beta - 90°$

5) $\triangle N\cancel{B}CD$:

$\left.\begin{array}{l}\angle CND = 90° \\ \angle \cancel{C}ND + \angle NCD + \angle CDN = 180° \\ \angle NCD = \cancel{\beta}\ 2\beta - 90°\end{array}\right\} \Rightarrow \angle NDC = \cancel{90° - \beta}\ 180° - 2\beta$

6) $\left.\begin{array}{l}\angle AD\cancel{B} + \angle NDC = 90° \\ \angle NDC = 180° - 2\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ADB = 2\beta - 90°$

Чистовик

Лист №7

№3 (продолж.)

~~7) $\angle AND$:~~

~~$\angle ADN = 90^\circ$~~

~~$\angle AND \angle NAD \angle$~~

7) Пусть $AC \cap BD = O$

8) $\triangle AOD$:

$\angle AOD = 90^\circ$

$\angle ADB = 2\beta - 90^\circ$ } $\Rightarrow \angle OAD = 180^\circ - 2\beta$

9) $\triangle ANM$:

$\angle NAM + \angle ANM + \angle AMN = 180^\circ$

$\cancel{180^\circ} - 2\beta + 2\alpha = \cancel{180^\circ}$

$\beta = \alpha$

10) Расс-им $\triangle ANM$ и $\triangle BDC$:

$AN = BD = x$

$DC = AM = x$

$\angle NAM = \angle BDC = 180^\circ - 2\alpha$ } $\Rightarrow \triangle ANM = \triangle BDC \Rightarrow NM = BC = 12$

(по 2 сторонам и углу между ними)

~~Дано:~~

~~Изначально у нас 13 чётных и 13 нечётных чисел.~~

~~Нам надо~~

11) По теор. cos:

$CD^2 = DB^2 + BC^2 - 2 DB \cdot BC \cos\alpha$

$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 144 - 24x\cos\alpha$

$x\cos\alpha = 6$

Чистовик

Лист №8

№3 (продолжение)

12) $\cos\alpha = \frac{BO}{BC}$

$\frac{6}{x} = \frac{BO}{12}$

$BO = \frac{72}{x}$

13) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} = \sqrt{\left(1-\frac{6}{x}\right)\left(1+\frac{6}{x}\right)} =$

$= \sqrt{\left(\frac{x-6}{x}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2-36}}{x}$

$OC = BC \cdot \sin\alpha = \frac{12\sqrt{x^2-36}}{x}$

$OD = BD - BO = x - \frac{72}{x} = \frac{x^2-72}{x}$

14) По теор. Пифагора:

$OC^2 + OD^2 = CD^2$

$\frac{144(x^2-36)}{x^2} + \left(x - \frac{72}{x}\right)^2 = x^2$

$\frac{144(x^2-36)}{x^2} + x^2 - 144 + \frac{72^2}{x^2} = x^2 \quad | \cdot x^2$

$144(x^2-36) + \cancel{x^4} - 144x^2 + 72^2 - \cancel{x^4} = 0$

№5

Изначально у нас 13 чётных и 13 нечётных чисел.

Нам надо получить 13 чётных и 13 нечётных чисел.

Если мы возьмём a и b разной чётности, то оба исходных числа станут нечётными.

Если мы возьмём a и b одинаковой чётности, то оба исходных числа станут чётными.