76-67-55-20
(184.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-2

Место проведения Челябинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ермакова Никиты Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

работа сдана 15:31

Дата
«5» апреля 2026 года

Подпись участника

95 (девяносто пять)

 Юрий Андреева

76-67-55-20 (184.2)

Черновик

$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$

$\cancel{3^{\sin x} \leq 3}$

$3^{\sin x}=n \qquad 5^{\sin x}=m$

$1+n^2+m^2=nm+n+m \quad \Big| \cdot 2$

$\cancel{n^2-nm-n=m-m^2}$

$\cancel{n(n-m-1)=m(1-m)}$

$(1+n+m)^2=1+n^2+m^2+2n+2m+2mn=$

$=$

$\cancel{2+}$

$1-2n+n^2+1-2m+m^2+n^2-2mn+m^2=0$

$(1-n)^2+(1-m)^2+(n-m)^2=0$

$n=m=1$

$\sin x=0$

Черновик

$(a+1)(b+1)(c+1) - ?$

x^3

$abc+ab+ac+bc+1+a+b+c - ?$

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

$\parallel$

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$\Downarrow$

$abc=22\cdot\sqrt{2}$

$ab+bc+ac=22+10\sqrt{2}$

$a+b+c=10+\sqrt{2}$

$ab=22 \quad c=\sqrt{2}$

$a+b=10$

$a=10-b$

$10b-b^2=22$

$S_0=22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}=33\sqrt{2}+32$

$8+44+20\sqrt{2}$

$40+4\sqrt{2}+22\sqrt{2}$

$(5+\sqrt{3};\ 5-\sqrt{3};\ \sqrt{2})$

$b^2-10b+22=0$

$D=100-88=12$

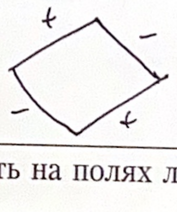
$b=\frac{10\pm2\sqrt{3}}{2}=5\pm\sqrt{3}$

$6+\sqrt{3};\ 6-\sqrt{3};\quad 1+\sqrt{2}$

стороны

$a=5\pm\sqrt{3}$

$6+\sqrt{3}$ и $6-\sqrt{3}$



76-67-55-20
(1842)

$\overline{4a89} \cdot \overline{290b} \equiv_{11} 1$

$a=1 \quad b=3$ (Черновик

$13+7\cdot 1+8\cdot 3 = \cancel{17} \quad 20+24=44$

$\overline{ba} / \overline{ab}$ - простое

$a \neq b$

$a+b \vdots 3$

$\overline{4b} \cdot$

$a \neq 0; b \neq 0$

$\cancel{b-4}$

$(4000+100a+80+9)(2000+900+b) \equiv_{11}$

$\equiv_{11} (7+a+3+9)(9+9+b) \equiv_{11} (8+a)(7+b) =$

$= 56+ab+7a+8b \equiv_{11} 1+ab+7a+8b \equiv_{11} 1$

$\Downarrow$

$ab+7a+8b=44 \qquad ab+7a+8b \vdots 11$

$a(b+7)=44-8b \qquad a(b+7)+8b \vdots 11$

$a=\frac{44-8b}{b+7} \qquad a=\frac{11k-8b}{b+7}$

$b=\frac{44-7a}{a+8}$

при $b=3 \qquad 11k-8b \vdots b+7$

$b(a+8)=44-7a$

$11k+56 \vdots b+7$

$k=1 \quad 11k+56=67 = 1\cdot 67$ — $\qquad 11k>8b$

$k=2 \quad 78=2\cdot 3\cdot 13 \quad \cancel{b=2} \quad \cancel{b=6 \quad a=}$

$k=3 \quad 89$ —

$k=4 \quad 100=5^2\cdot 2^2 \quad b \in \left[3\right. \quad b=3 \quad a=2$

Черновик

$5a-3b \quad 7a-5b$

$2a-2b$

$a-b$

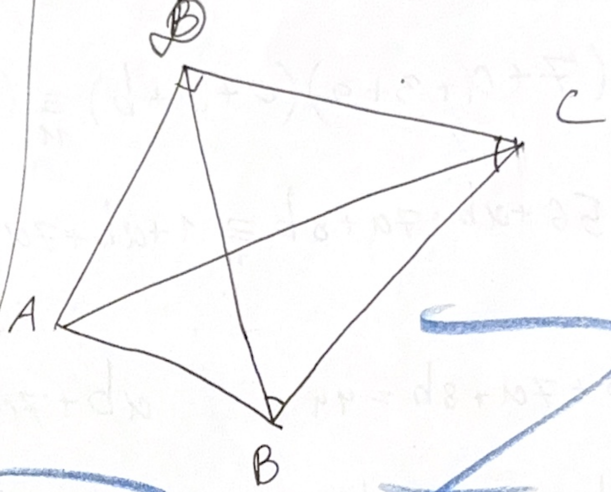
ab

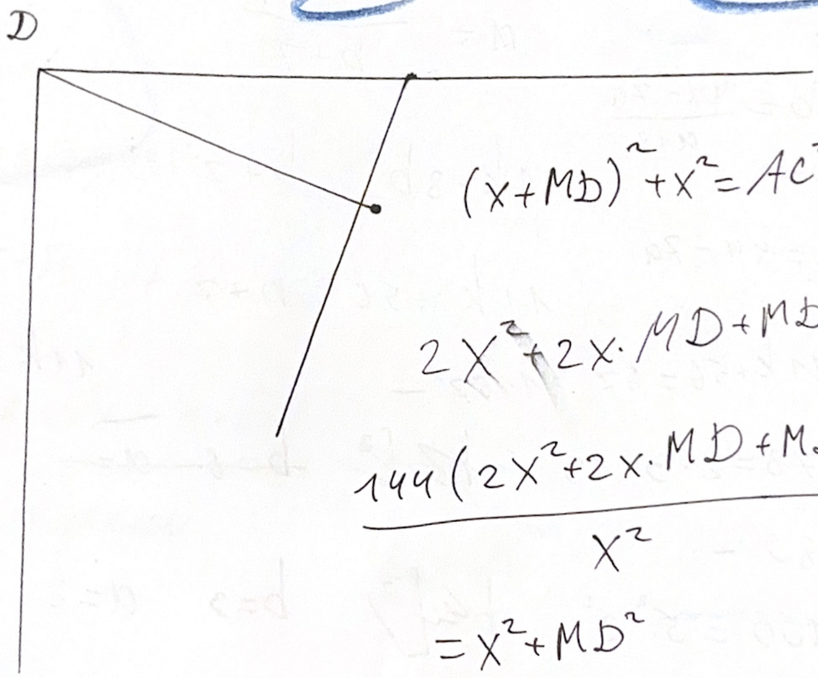
$35a^2+15b^2-46ab$

~~не~~

$a_n b_n + a_{old} b_{old} \;\vdots\; 5$

20	2005
25	2010
30	2015
35	2020
40	2025
45	



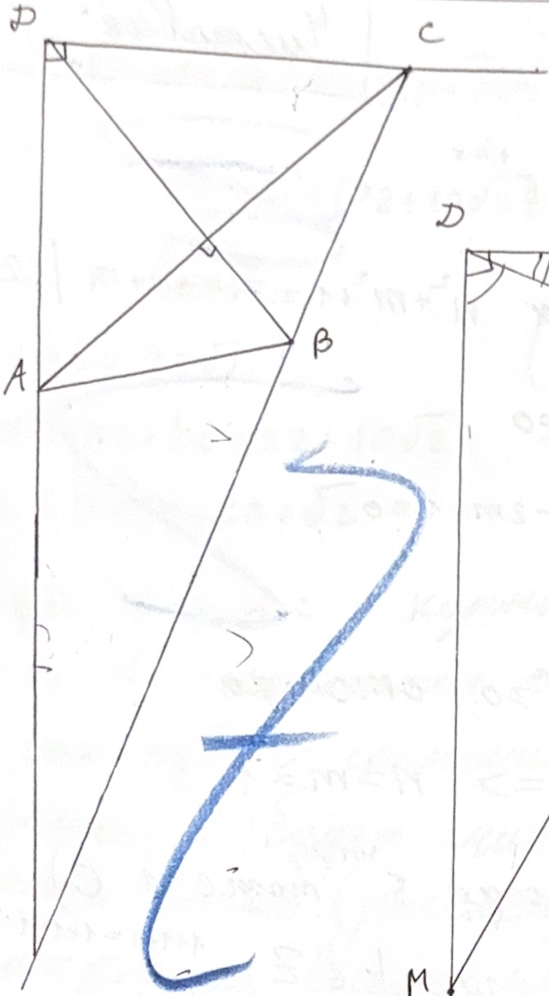


$(x+MD)^2+x^2=AC^2$

$2x^2+2x\cdot MD+MD^2=AC^2$

$\frac{144(2x^2+2x\cdot MD+MD^2)}{x^2}=$

$=x^2+MD^2$

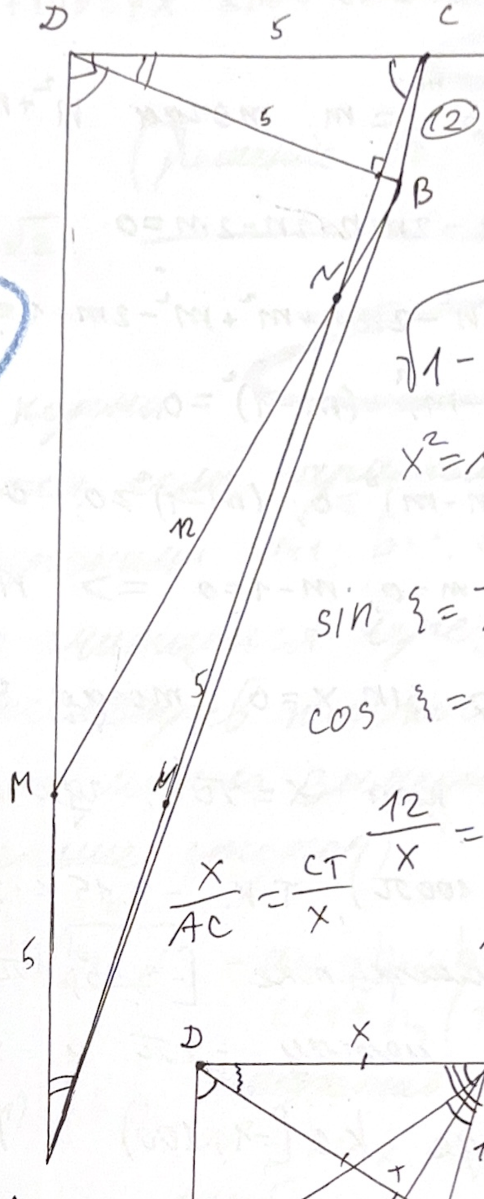


(Черновик
~~AD=~~

$x(x+NC)$ – ?

$x^2 + x\cdot NC$ – ?

$MC = \frac{MB\cdot AC}{AD}$



$CT = \frac{12x}{MC}$

$x = \frac{12AC}{MC}$

$\sqrt{1-\frac{x^2}{AC^2}} = \sqrt{\frac{AC^2-x^2}{AC^2}}$

$x^2 = AC\cdot CT$

$\frac{CT}{12} = \frac{x}{MC}$

$\sin\xi = \frac{x}{AC}$

$12x = CT\cdot MC$

$\cos\xi = \frac{AD}{AC}$

$\frac{12}{x} = \frac{MC}{AC} = \frac{MB}{AD}$

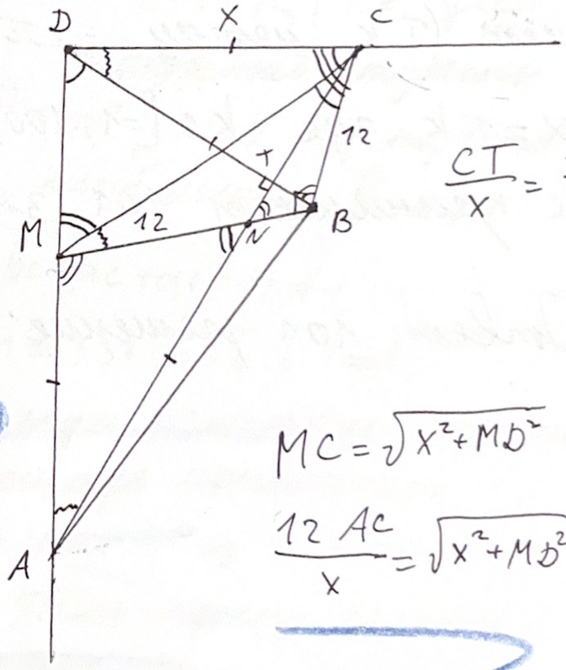
$\frac{x}{AC} = \frac{CT}{x}$

$12AC = x\cdot MC$

$AC^2 = x^2 + AD^2$

$x^2 - \frac{x^2 AD}{AC} = 6$

$x^2 - \frac{12x\,AD}{MC} = 6$



$\frac{CT}{x} = \frac{12}{MC}$

$2x^2 - 2\overset{x^2}{\cos}\xi = 12$

$\cancel{x^2 - \frac{AD}{AC} = 6}$

$x^2\left(1-\frac{AD}{AC}\right) = 12$

$MC = \sqrt{x^2+MD^2}$

$\frac{12AC}{x} = \sqrt{x^2+MD^2}$

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{AD^2+x^2}\right)\cdot x$ – ?

Чистовик

Задача №1

$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$

$3^{\sin x} = n$, $5^{\sin x} = m$, тогда $n^2 + m^2 + 1 = mn + n + m \mid \cdot 2$

$2n^2 + m^2 \cdot 2 + 2 - 2mn - 2n - 2m = 0$

$n^2 - 2n + 1 + n^2 - 2mn + m^2 + m^2 - 2m + 1 = 0$

$(n-1)^2 + (n-m)^2 + (m-1)^2 = 0$

$(n-1)^2 \geq 0$; $(n-m)^2 \geq 0$; $(m-1)^2 \geq 0$, отсюда

$n-1=0$; $n-m=0$; $m-1=0$ $\Rightarrow$ $n=m=1$

$3^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = 0$ (тогда $5^{\sin x}$ тоже 1 $\oplus$)

$1+1+1 = 1+1+1$

$\sin x = 0$ при $x = \pi k$, где $k \in Z$

$x \in [-\pi; 100\pi)$, т.к. $-3{,}15 < -\pi$ и $314 < 100\pi$,

а на промежутке $[-3{,}15; -\pi)$ ~~в 10~~ корней нет (т.к. между -2π и $-\pi$), (а $(314; 100\pi)$ – между 99π и 100π)

$x = \pi k$, где $k \in [-1; 100)$ и $k \in Z$, значит

k принимает 101 значение (от -1 до 99)

Ответ: 101 решение на $x \in [-3{,}15; 314]$

Задача №2

Чистовик

$$x^3+(22+10\sqrt{2})x=(10+\sqrt{2})x^2+22\sqrt{2}$$

$$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$$

По т. Виета:

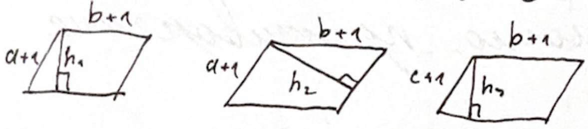
$abc=22\sqrt{2}$ (решение: $\sqrt{2}$; $5+\sqrt{3}$; $5-\sqrt{3}$)

$ab+ac+bc=22+10\sqrt{2}$

$a+b+c=10+\sqrt{2}$

где a, b и c – корни

max V достигается, если параллелипипед – это куб со сторонами $a+1$; $b+1$; $c+1$, т.к. иначе V будет считаться через произведение высот (рассмотрев плоскость с каждой из высот, можно заметить, что эти высоты меньше сторон):



– $a+1>h_1$; $b+1>h_2$; $c+1>h_3$ (т.к. угол напротив стороны $90°$ – max => сторона наибольшая в Δ)

Тогда $(a+1)(b+1)(c+1)>h_1h_2h_3$

$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ac+a+b+c+1=$

$=22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}+1=33+33\sqrt{2}$ (V_{max})

Заметим, что можно всегда изменять параллелипипед так, чтобы площадь монотонно ~~изменялась~~ уменьшалась, путем движения 1 из 2 плоскостей в паре параллельных. Так можно делать, пока он не станет практически ~~двумерным~~ одномерным, то есть просто линией, у которой $V=0$. Значит ответ: $(0; 33+33\sqrt{2}]$

Чистовик

Задача №5

1) если $a \vdots 5$:

тогда $7a-5b \underset{5}{\equiv} 0-0=0 \vdots 5$

2) если $b \vdots 5$:

тогда $5a-3b \underset{5}{\equiv} 0-0=0 \vdots 5$

То есть, если $a \vdots 5$ или $b \vdots 5$, то какое-то из чисел $7a-5b$ и $5a-3b \vdots 5$ (если и $a \vdots 5$, и $b \vdots 5$, то делятся оба числа $7a-5b$ и $5a-3b$).

Значит кол-во чисел $\vdots 5$ не уменьшается

Изначально: 20, 25, 30, 35, 40, 45 – 6 чисел

В конце нужно: 2005, 2010, 2015, 2020, 2025 - 5 чисел

То есть кол-во чисел $\vdots 5$ уменьшилось, но такого быть не могло, противоречие

Ответ: нет, нельзя

Черновик

~~(7+a)(7+b)~~

$(8+a)(7+b) \equiv_{11} 1$ ~~45~~

$1+ab+7a+8b \equiv_{11} 1$ $10a+2$

$13b+2$

$ab+7a+8b \,\vdots\, 11$ $2b+2 \,\vdots\, 11$

$a=1:$ $b+7+8b=9b+7 \,\vdots\, 11$ $b+1$

$b=9$

$a=2:$ $10b+3 \,\vdots\, 11$

$b=$

11	21	31	41	51	61	6
12	22	32	42	52	62	
13	23	33	43	53	63	
14	24	34	44	54		
15	25	35	45			
16	26	36				

Чистовик

Задача №4

$\overline{4a89} \cdot \overline{290b} = (4089+100a)(2900+b) = 4089 \cdot 2900 +$
$+ 100ab + 290000a + 4089b \underset{11}{\equiv} 8 \cdot 7 + ab + 7a + 8b \underset{11}{\equiv} 56 +$
$+ ab + 7a + 8b \underset{11}{\equiv} 1 + ab + 7a + 8b$ ($\underset{11}{\equiv} 1$ по условию)

Значит $ab + 7a + 8b \vdots 11$

1) $a=1$: $b+7+8b = 9b+7 \vdots 11$, отсюда $b=9$.

Если будет 2 решения, то $ab_1 + 7a + 8b_1 - ab_2 - 7a$
$- 8b_2 = a(b_1-b_2) + 8(b_1-b_2) = (a+8)(b_1-b_2) \vdots 11$, но
$b_{1,2}$ $max = 9$ $min = 0$ $\Rightarrow$ max $b_1 - b_2 = 9$, min $b_1 - b_2 = 1$
$(b_1 \neq b_2) \Rightarrow b_1 - b_2 \not\vdots 11 \Rightarrow a+8 \vdots 11$ ($a \in [1;9]$, отсюда
a только 3, во всех остальных случаях только 1 решение, найдем их)

2) $a=2$: $2b+14+8b = 10b+14 \vdots 11$, $b=3$

3) $a=3$: $3b+21+8b = 11b+21 \vdots 11$, $b=\varnothing$, т.к. $11b \vdots 11$,
а $21 \not\vdots 11 \Rightarrow 11b+21 \not\vdots 11$

4) $a=4$: $12b+28 \vdots 11$, $b=5$

5) $a=5$: $13b+35 \vdots 11$, $b=\varnothing$, т.к. $b_1=10$, но $b<10$
$(13b+35 \underset{11}{\equiv} 2b+2 \Rightarrow b+1 \vdots 11)$

6) $a=6$: $14b+42 \vdots 11$, $b=8$

7) $a=7$: $15b+49 \vdots 11$, $b=7$

8) $a=8$: $16b+56 \vdots 11$, $b=2$

9) $a=9$: $17b+63 \vdots 11$, $b=6$

Из них 45, 68, 77, 82, 96 - не простые
32, 54, 86, 28, 69, 91

Ответ: 23; 19;

Задача №6 — Чистовик

а) $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{10}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{15}{6^2}+$

$+\frac{1}{12}\cdot\frac{21}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{26}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{30}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{33}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{35}{6^2}=$

$=\frac{1}{12\cdot 6^2}(1+3+6+10+15+21+26+30+33+35)=$

$=\frac{1}{6^3\cdot 2}\cdot 180=\frac{6^2\cdot 5}{6^2\cdot 12}=\frac{5}{12}$

Ответ: $\frac{5}{12}$

Для подсчета, мы сложили вероятности победить Ане, если у нее выпало i очков $i\in[3;12]$, $i\in N$ ($i\neq\{1;2\}$, т.к. тогда победить невозможно, у Тани 2 кубика $\Rightarrow$ min 2 очка). Вероятность этого равна $\frac{1}{12}\cdot\frac{x}{6^2}$, где x - кол-во победных для Ани наборов очков Тани, $\frac{1}{12}$ - шанс, что выпало i, $\frac{1}{6^2}$ - шанс выпадения 1-ого набора из x.

б) Аналогично считая шанс победы Тани в 1-ом ходу (как в п. а) получаем:

$\frac{35}{6^2}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{33}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{30}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{26}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{21}{6^2}+$

$+\frac{1}{12}\cdot\frac{15}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{10}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{6^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6^2}=$

$=\frac{5}{12}$, на ничью шанс $1-\frac{5}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6^3}$ – 3 ничьи, и нет победителя

Ответ: $\frac{1}{6^3}$

Чистовик

в) Вероятности выиграть у игроков одинаковые и равны $\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{12}=$

$=\frac{5}{12}\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}\right)=\frac{43}{6^3\cdot 2}\cdot 5=\frac{215}{2\cdot 6^3}$

(вероятность выиграть после n ничей равна $\frac{1}{6^n}\cdot\frac{5}{12}$, где $\frac{1}{6^n}$ - вероятность ничьи, $\frac{5}{12}$ - вероятность выиграть)

Чистовик, задача №6 (продолжение)