0 192417 300009

19-24-17-30
(185.3)

+1 доп. лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 Е-1 математика

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Овянниковой Леонида Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«5» апреля 2026 года

Подпись участника

19-24-17-30 (185.3)

№1 (чистовик)

Жаро

$\sin x = t : t \in [-1;1]$

$2^{2t} + 7^{2t} + 1 = 14^t + 2^t + 7^t$

$2^t = a > 0$ | $a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$7^t = b > 0$ | $a^2 - a(b+1) + b^2 - b + 1 = 0$

$D_a = (b+1)^2 - 4(b^2 - b + 1) = b^2 + 2b + 1 - 4b^2 + 4b - 4 =$

$= 6b - 3b^2 - 3 = 3(2b - b^2 - 1) = -3(b^2 - 2b + 1) = -3(b-1)^2$

Корень есть $\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{b+1}{2} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2^t = 1 \\ 7^t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

т.к. $-\pi < -3.14$ то $k \leq -1$ не подходит

$\Rightarrow k \geq 0$; при $k = 100$ $x = 100\pi = 314,15 < 315$

при $k = 101$: $x = 101\pi > 315$

$\Rightarrow k \in \{0; 1 \ldots 100\}$

Ответ: 101

№2 чистовик

$x^3+(23+10\sqrt{3})x=(10+\sqrt{3})x^2+23\sqrt{3}$

1) $V=(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$

Т.к. Виета: $abc=-(-23\sqrt{3})=23\sqrt{3}$

$ab+bc+ca=23+10\sqrt{3}$

$a+b+c=-(-(10+\sqrt{3}))=10+\sqrt{3}$

$\Rightarrow V=23\sqrt{3}+23+10\sqrt{3}+10+\sqrt{3}+1=44+44\sqrt{3}$

2) докажем, что корни есть,

$f(x)=x^3-(10+\sqrt{3})x^2+(23+10\sqrt{3})x-23\sqrt{3}$

$f'(x)=3x^2-2(10+\sqrt{3})x+23+10\sqrt{3}=$

$=3x^2-(20+2\sqrt{3})x+23+10\sqrt{3}$

$=x^3-10x(x-\sqrt{3})-\sqrt{3}x^2+23(x-\sqrt{3})=$

$=(x-\sqrt{3})(x^2-10x+23)=(x-\sqrt{3})((x-5)^2-2)$

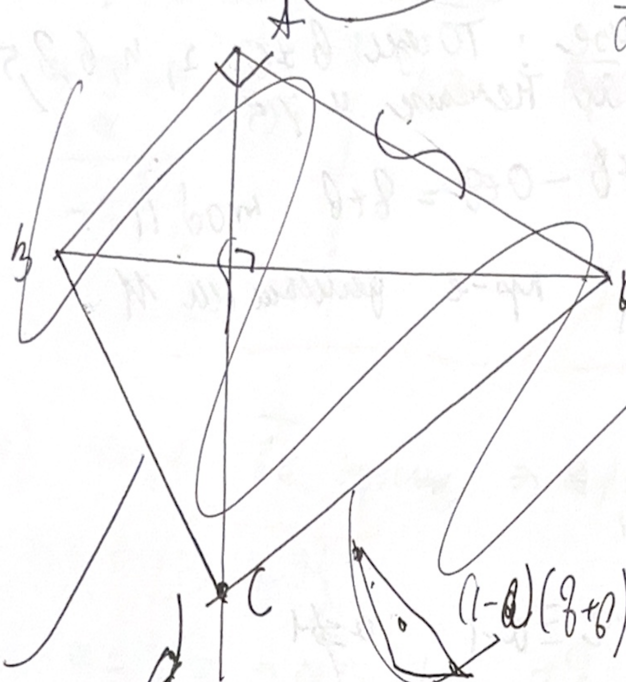
последняя скобка имеет корни: $x=5\pm\sqrt{2}$

тогда и $f(x)$ имеет 3 корня

Черновик

z; $x: 8$/ $P(x)$:

$7936 \cdot 1605$



$7-9+3-a=1-a$

$-1+b-a+9=8+b$

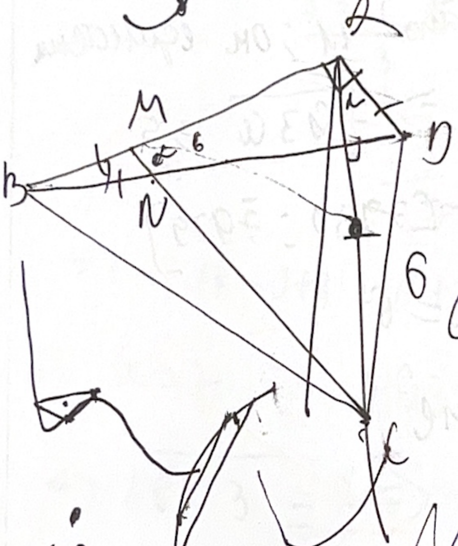
$(1-a)(8+b) \equiv 1$

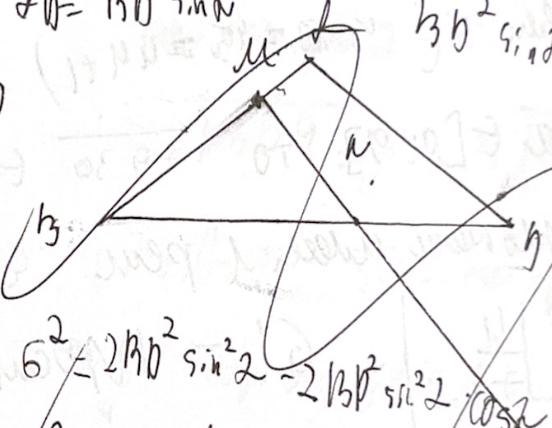
$a \neq 1$ $b \neq 3$ $a=1$ $b=5$ $b=7$

BD: $BD \sin\alpha$

$AD = BD \sin\alpha$

$BD^2 \sin 2\alpha = t$





$6^2 = 2BD^2\sin^2\alpha - 2BD^2\sin^2\alpha\cos 2\alpha$

$= 2t\sin\alpha - 2t^2\sin\alpha\cos 2\alpha$

$= t(2\sin\alpha - \sin 2\alpha$

a; $P(a)$

$a \in P(a)$

$P(x)$

$x: 8$

$0:0$

$a: P(a)$

$b: P(b)$

$a^2 + P(a)^2 < 1$

$b^2 + P(b)^2 < 1$

$(a-b)^2 + (P(a) - P(b))^2 < 1$

№4 черновик

1) пусть $\overline{ab}$ – простое : тогда $b \neq 0, 2, 4, 6, 8, 5$
т.к $\overline{ab}$ нечетное и $\not\vdots\, 5$

т.к $\overline{1b09} \equiv -1+b-0+9 = 8+b \mod 11$

то $b+3$ сравнимо пр-е делимостью на 11

$\Rightarrow b \in \{1; 5; 7\}$

а) $b=1 \Rightarrow \overline{1109} \underset{11}{\equiv} 9$

$\overline{793a} \equiv -7+9-3+a \equiv a-1 \quad ; a \neq 1$

Ищем обратный ост для 9 mod 11 ; он единственный и равен 5 ($5 \cdot 9 = 45 \equiv 44+1$) $\Rightarrow \overline{793a} \underset{11}{\equiv} 5$

т.к $a \in [0; 9]$ то $\overline{793a} \in [7930 ; 7939]$

и сравнение имеет 1 реш $a = 6$

$$\begin{array}{r|l} 7936 & 11 \\ \underline{77} & 721 \\ 23 & \\ \underline{16} & \\ \underline{11} & \\ 5 & \end{array}$$

61 – простое

б) $b = 5 \Rightarrow \overline{1509} \equiv 79 \equiv 2 \mod 11$

Обратный ост. для 2 это 6 ; $\Rightarrow \overline{793a} \underset{11}{\equiv} 6$

$\Rightarrow a = 7$

в) $b=7 \Rightarrow 1709 \equiv 609 \equiv 59 \equiv 4 \mod 11$

Обр ост для 4 это 3 $(4 \cdot 3 = 12 \underset{11}{\equiv} 1)$.

19-24-17-30 (185.3)

~~п.4~~ ~~числовик~~

$\Rightarrow \overline{793a} \underset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow a = 4$ ~~(т.к. 1 7 9~~

$$\begin{array}{r|l} 7934 & 11 \\ 77 & 721 \\ \hline 23 & \\ 14 & \\ 11 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

47 – простое

2) теперь $\overline{ba}$ просто $\Rightarrow a \neq 0; 2; 4; 6; 8; 5; 1$

$\Rightarrow a \in \{3; 7; 9\}$

а) $a = 3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 7933 & 11 \\ 77 & 721 \\ \hline 23 & \\ 22 & \\ \hline 13 & \\ 2 & \end{array}$$

$7933 \underset{11}{\equiv} 2$

обр ост для 2 – 6

$\Rightarrow \overline{1b09} \underset{11}{\equiv} 6; \Rightarrow \overline{1b03} \vdots 11$

$\Rightarrow -1 + b - 0 + 3 = b + 2 \vdots 11 \Rightarrow b = 9;$ 39 – не простое

б) $a = 7 \Rightarrow 7937 \underset{4}{\equiv} 6$ обр ост для 6 – 2

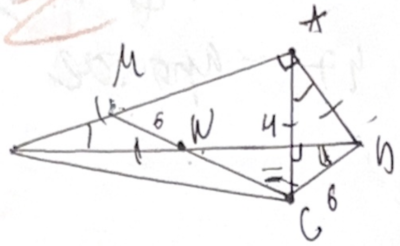
$\Rightarrow \overline{1b03} \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow -1 + b - 0 + 3 - 2 = b \vdots 1 \Rightarrow b \neq 0$ $\varnothing$

в) $a = 9 \Rightarrow 7939 \underset{11}{\equiv} 8$ обр ост для 8 – 7

$\Rightarrow -1 + b - 0 + (9 - 7) = b + 1 \vdots 11 \Rightarrow b = 10$ $\varnothing$

Отв: 47 или 61

№3 .. Черновик



$\angle DAC = \angle ABD$ как $\angle$ м. вне в пр. ун Δ-ке

$\Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta MBN$ по 2 С и у.м.н.

т.к. $\angle CAD = \beta \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 90 - \frac{\beta}{2} =$

$= \angle BMN = \angle BNM = \angle CND$;

$\angle CDN = 90 - \angle ACD = \frac{\beta}{2}$; $\angle NCB = 180 - \frac{\beta}{2} - 90 + \frac{\beta}{2} =$

$= 90 \Rightarrow \angle MCD = \angle MAD = 90$;

пусть $BD = x$; $\Rightarrow AD = x \sin\beta$; $S_{ABCD} = \frac{BD \cdot AC}{2} =$

$= \frac{x^2 \sin\beta}{2}$; но Th cos ΔCAD: $6^2 = 2x^2\sin^2\beta -$

$- 2x^2 \sin^2\beta \cos\beta$; $18 = x^2 \sin^2\beta(1 - \cos\beta)$

$MD^2 = AM^2 + AD^2 = x^2\sin^2\beta + x^2(\cos\beta - \sin\beta)^2 =$

$= x^2\sin^2\beta + x^2(1 - \sin 2\beta) = x^2(1 + \sin^2\beta - \sin 2\beta)$

$MD^2 = MC^2 + CD^2 = MC^2 + 36$

$MC = 6 + NC$; пусть $BD \cap AC = H$;

$\Rightarrow$ $AD = x\sin\beta$; $AB = x\cos\beta$; $AH = x\cos\beta\cdot\sin\beta$

$HC = \frac{x}{2}$ $AD - AH = x\sin\beta - x\sin\beta\cos\beta =$

$= x\sin\beta(1-\cos\beta)$

$HC = KC\cdot\sin\beta/2 \Rightarrow KC = \frac{x\sin\beta(1-\cos\beta)}{\sin\beta/2} = \frac{2x\cos\beta/2(1-\cos\beta)}{}$

$KC^2 + 36 = \left(2x\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta)+6\right)^2 + 36 = x^2(1+\sin^2\beta - \sin 2\beta)$

$4x^2\cos^2\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta)^2 + 24x\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta) + 72 = x^2(1+\sin^2\beta-\sin 2\beta)$

$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\beta+1}{2}$

$2x^2(1-\cos\beta)\underbrace{(1-\cos^2\beta)}_{\sin^2\beta} + 24x\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta)+72 =$

$= 108 + 24x\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta) = x^2(1+\sin^2\beta - \sin 2\beta)$

$a = 1+\sin^2\beta - 2\beta$, $2b = 24\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta)$

$ax^2 - 2bx - 108 = 0$; $D_1 = b^2 + 108a = \frac{b^2}{4}\sin^2\beta(1-\cos\beta)^4$

$+108 + 108\sin^2\beta - 108\sin 2\beta = 180\sin^2\beta$

$x^2\sin^2\beta = \frac{18}{1-\cos\beta}$

$108 + 24x\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta) = \frac{18}{1-\cos\beta} + \frac{18(1-\sin 2\beta)}{\sin^2\beta(1-\cos\beta)}$

$18 + 4x\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta) = \frac{3(\sin\beta-\cos\beta)^2}{\sin^2\beta(1-\cos\beta)}$

черновик

$$\left(4x\cos\frac{\beta}{2}(1-\cos\beta)\right)^2 = 9\left(\frac{(\sin\beta-\cos\beta)^2}{\sin^2\beta(1-\cos\beta)}-6\right)^2$$

$$8x^2(\cos\beta+1)(1-\cos\beta)(1-\cos\beta) = 8x^2\sin^2\beta(1-\cos\beta) = 8\cdot 18$$

$$\Rightarrow 16 = \left(\frac{(\sin\beta-\cos\beta)}{\sin^2\beta(1-\cos\beta)}-6\right)^2 \text{ mк } >0$$

$$10 = \frac{(\sin\beta-\cos\beta)^2}{\sin^2\beta(1-\cos\beta)}$$

$$10\sin^2\beta - 10\sin^2\beta\cos\beta = 1-\sin 2\beta$$

$$9 - 10\cos^2\beta - 10\sin^2\beta\cos\beta = -\sin 2\beta \quad \cancel{\cos\beta\neq 0}$$

$$9 - 5(1+\cos 2\beta) - 5\sin\beta\sin 2\beta = -\sin 2\beta$$

$$4 - 5\cos 2\beta - 5\sin\beta\sin 2\beta = -\sin 2\beta$$

$$\sin 2\beta + 5\sin\beta\sin 2\beta + 5\cos 2\beta = 4$$

$$10 - 10\cos\beta = 1 + \operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}\beta$$

также $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}x\cdot x\cos\beta\cdot\sin\beta +$

$$+\frac{1}{2}x\cdot 6\sin\beta/2 = \frac{x^2\sin\beta}{2}$$

$$\Rightarrow x\cos\beta\sin\beta + 6\sin\frac{\beta}{2} = x\sin\beta$$

$$x\sin\beta(1-\cos\beta) = 3\sin\frac{\beta}{2}$$

$$x^2\sin^2\beta(1-\cos\beta)^2 = 18(1-\cos\beta) = 8(1-\cos\beta)$$

$$= \frac{9\sin^2\beta}{2}$$

№5 +)

числовая

чтобы Петя выиграл, ~~проиграл~~ ~~[illegible]~~ не

если след выпало число a, надо чтобы у ~~[illegible]~~ Васи выпало $\leq a-1$ в сумме

Заведем спец тензор $I = \begin{pmatrix} p_1, & \dots & p_i & \dots & p_{12} \\ q_1, & \dots & q_i & & q_{12} \end{pmatrix}$

где p_i - вероятность, что у Пети ровно i очков, ~~[illegible]~~ а q_i - у Васи $\leq i-1$ очков.

Заметим, что мы ищем мат ож суммы

Также $p_i = \frac{1}{12}$; $q_1 = 0$; Вася совершает 36 эл-х событий

Посчитаем кол-во способов, когда у Васи i очков

где $(a;b)$ - a на 1 куб., b - на 2 м

i	способы	кол-во
1	0	0
2	(1;1)	1
3	(2;1), (1;2)	2
4	(2;2), (3;1), (1;3)	3
5	(2;3); (3;2), (1;4), (4;1)	4
6	(1;5); (5;1); (2;4), (4;2); (3;3)	5
7	(1;6); (6;1), (2;5), (5;2), (3;4); (4;3)	6
8	(2;6); (6;2); (3;5), (5;3); (4;4)	5
9	(3;6), (6;3), (4;5), (5;4)	4
10	(5;5); (6;4); (4;6)	3
11	(5;6) (6;5)	2
12	(6;6)	1

Тогда ~~числитель~~

i	q_i
1	0/36
2	0/36
3	1/36
4	3/36
5	6/36
6	10/36
7	15/36
8	21/36
9	26/36
10	30/36
11	33/36
12	35/36

Тогд EX, где X - победа Пети есть; $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}(0+0+1+3+6+10+15+21+26+30+33+35) =$

$= \frac{1}{12\cdot 36}(20+(54+106)) = \frac{180}{36\cdot 12} =$

$= \frac{5}{12}$

Ответ А: $\frac{5}{12}$

Б) ~~То что Петя победит в ходе — $\frac{5}{12}$ — вероятность~~

То что за 1 ход ~~никто~~ не выявлен победа значит что у них равное очков;

r_i - вероятность, что Вася наберет i очков.

Тогда вероятность что за ход не выявлен победитель есть EX где $I \sim \begin{pmatrix} i \\ r_i \end{pmatrix}$ $p_i = \frac{1}{12}$ $\forall i \in [1;12]$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_i	0	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Тогд $EX = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}(0+1+\ldots+1) = \frac{1}{12\cdot 36}\cdot(36) = \frac{1}{12}$

Тогда вероятность, что извещатель не выявлен (чистовик)

$-\frac{11}{12}$; если за 3 хода не выявлен то

вероятность $-\frac{11}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{11}{12}$ т.к. ни на одном из 3х не выявлен

$-\cancel{\frac{1331}{1331+3\cdot144+36+1}}=\cancel{\frac{1331}{1331+\ldots}}\quad\frac{1331}{1728}$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

~~Если выявлен то~~ $\cancel{1-\frac{1331}{1728}=\frac{397}{1728}}$

Ответ: не будет выявлен $-\frac{1331}{1728}$

будет выявлен: $\frac{1}{12}+\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{11}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\left(1+\frac{11}{12}+\frac{121}{144}\right)$

$=\frac{1}{12}\left(1+\frac{132+121}{144}\right)=\frac{397}{1728}$

в) Вероятность выиграть у Пети $-\frac{1}{12}$;

Вероятность ничьи $-\frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ $\frac{6}{12}$ - вероятность выиграть у Васи на 1 ходу

тогда Вася выиграет с вероятностью $\frac{6}{12}+\frac{6}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{6}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot12}+\frac{1}{2\cdot12^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}\right)=\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{12^3}\right)}{1-\frac{1}{12}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1727}{11\cdot144}$

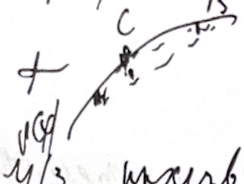
$=\frac{1727}{22\cdot144}$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 22 \\ \hline 288 \\ 288 \\ \hline 3168 \end{array}$$

Ответ: у Васи $-\frac{1727}{3168}$

№6 черновик

1) Если вершины $\triangle$ лежат на отрезке, где многочлен имеет положительную выпуклость (БОО вверх) то тогда: пусть точка с наим. абсциссой – $A(a; P(a))$ с наиб. абсциссой – $B(b; P(b))$



м/з проведём точку $(x; y) \in \triangle ABC$ пров. прямую $\parallel AB$ пусть она $\cap$ $P(x)$ в $(x_1; P(x_1))$ и $(x_2; P(x_2))$

тогда в силу выпуклость: $a < x_1, x_2 < b$

$\Rightarrow |x_1 - x_2| < |a - b|$, аналогично $\min(P(a); P(b)) < P(x_1), P(x_2) < \max(P(a); P(b))$

$\Rightarrow |P(x_1) - P(x_2)| < |P(a) - P(b)|$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (P(x_1) - P(x_2))^2 < AB^2 < 1$

$\Rightarrow$ ~~искомый~~ искомый отрезок < 1

2) если ~~точки~~ вершины лежат на разных выпуклостях то БОО: вып. вниз меняется на вып. вверх см рис.

для точек ~~лежащ~~ лежащих между $P(x)$ и BC пров ~~прямую~~ прямую $\parallel BC$ (см 1)

для точек не из этого мн-ва проведём прямую $\parallel AB$: заметим, что расстояние между точками $\cap$ проведенной прямой и $P(x)$ меньше, чем расст. м. точками $\cap$ этой прямой, $P(x)$ и BC в силу выпуклости

черновик

Но если рассмотреть график функции

$Q(x) : \begin{cases} P(x) : x \le C \\ BC, x \ge C \end{cases}$ где C ~~в~~ между A и B

то Q(x) не строго выпукл вниз, для него справедливы рассуждения из 1.

Из свойства выпуклости вверх/вниз и хорды AB

Любая хорда ~~левее~~, лежащая выше/ниже AB ~~на~~ меньше |AB|.

P.S остальные случаи можно рассмотреть, заменив P(x) на $-P(x)$