+1 лист

0 879387 630007

87-93-87-63
(163.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Савченко Владислава Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника

95 (девяносто пять) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Ягмин Андрей

87-93-87-63 (163.3)

Чистовик (1)

№5.) Докажем, что количество чисел, кратных пяти, не уменьшается. Пусть это не так и после какого-то хода количество чисел, кратных пяти, уменьшилось. Тогда это значит, что среди стёртых а и в чисел, делящихся на 5 больше, чем среди написанных 5а − 3в и 7а − 5в.

Если $a \not\vdots 5$ и $в \not\vdots 5$, то мы стёрли 0 чисел, кратных 5, их количество точно не уменьшилось. Если $a \vdots 5$ и $в \vdots 5$, то и $(5a-3в) \vdots 5$ − ($5a \vdots 5$, $3в \vdots 5$ $\Rightarrow (5a-3в) \vdots 5$), и $(7a-5в) \vdots 5$ − ($7a \vdots 5$, $5в \vdots 5$ $\Rightarrow (7a-5в) \vdots 5$) − мы стёрли 2 числа, кратных пяти, и написали 2 числа, кратных пяти − их количество не уменьшилось. Если $a \vdots 5$ и $в \not\vdots 5$, то $(7a-5в) \vdots 5$ − $7a \vdots 5$ и $5в \vdots 5$, значит, $(7a-5в)$ делится на 5 − мы стёрли одно число, кратное пяти и написали хотя бы 1, кратное 5 − их количество не уменьшилось. Ну и если $a \not\vdots 5$ и $в \vdots 5$, то $(5a-3в) \vdots 5$ − $5a \vdots 5$ и $3в \vdots 5$, значит, $(5a-3в) \vdots 5$. − мы стёрли одно число, кратное 5 и написали хотя бы одно число, кратное 5, их количество не уменьшится.

Чистовик ②

№5.) (продолжение). Итак, мы рассмотрели все возможные случаи и для каждого из них количество чисел, кратных 5 не уменьшилось, а значит, количество чисел, кратных 5 не может уменьшиться вообще. Изначально у нас было 6 таких чисел (15, 20, 25, 30, 35, 40), а в конце 5 (2005, 2010, 2015, 2020, 2025).
Противоречие (количество таких чисел уменьшилось, но такого быть не может - см. выше).
Значит, такого случиться не могло.
Ответ: нет.

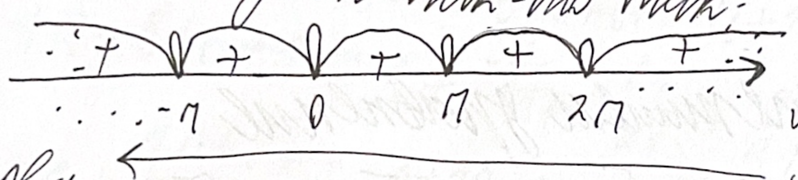
№1.) Сделаем замену: $2^{\sin x} = a$, $7^{\sin x} = b$. Тогда $2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = a^2 + b^2 + 1$, $14^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x} =$
$= ab + a + b$: $a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$.
$a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = 0$ или же ~~$(a-b)^2 + (a-1)(b-1) = 0$~~
$(a-b)^2 + (a-1)(b-1) = 0$. Теперь есть 2 случая:
1.) $(a-b)^2 = 0$, значит, $a = b$, $2^{\sin x} = 7^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin^n x = 0$
2.) $(a-b)^2 > 0$ (т.к. мы работаем в поле действительных чисел, то $(a-b)^2 \geq 0$ - всего 2 случая: $(a-b)^2 = 0$ или $(a-b)^2 > 0$).

87-93-87-63 (362)

№1.)(продолжение) Чистовик (3)

Тогда поскольку ~~правая часть равна 0, то~~ $(a-b)^2+(a-1)(b-1)=0$, ~~но~~ а $(a-b)^2\geq 0$, значит, $(a-1)(b-1)<0$. Давайте покажем, что такое невозможно. Для решения этого неравенства воспользуемся методом интервалов.

$a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow 2^{\sin x}=1 \Rightarrow \sin x=0$; $b-1=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow 7^{\sin x}=1 \Rightarrow \sin x=0$, ~~поскольку мы знаем~~. Значит, ось выглядит как-то так:



Везде на числовой оси ~~оси~~ $(a-1)(b-1)\geq 0$.

Например, при $x=\frac{\pi}{2}$, $(a-1)(b-1)=(2^1-1)(7^1-1)>0$.

(это происходит т.к. в каждой точке „нуле" у нас нуль принимают в ней как $2^{\sin x}-1$, так и $7^{\sin x}-1$ — знак не меняется (т.е. если на промежутке $[0;\pi]$ ~~все~~ $(a-1)(b-1)\geq 0$, то и на соседних промежутках $(a-1)(b-1)\geq 0$.

Итак, мы поняли, что решениями являются такие x, что $\sin x=0$. ~~т.е.~~ т.е. $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$. Подсчитаем количество таких k на отрезке $[-3,14; 315]$. ~~Так~~

$\pi k\in[-3,14; 315]$, ~~значит, k неотрицательно (иначе $\pi k\leq-\pi=-3,1415\ldots$, это не входит в данный отрезок)~~.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик (4)

№1.) (продолжение). При $\pi k = -3{,}14$, $k = \frac{-3{,}14}{\pi} = \frac{-3{,}14}{3{,}1415...}$, это чуть больше, чем -1. При $\pi k = 315$, $k = \frac{315}{\pi} = \frac{315}{3{,}1415...}$, это чуть больше ста.

Значит, $k \in [\frac{-3{,}14}{\pi}; \frac{315}{\pi}]$, и $k \in \mathbb{Z} \to$ подходят все целые k от нуля до ста - всего 101 решение.

Ответ: 101 решение

№2.) Немного перепишем уравнение:
$x^3 - (10+\sqrt{3})x^2 + (23+10\sqrt{3})x - 23\sqrt{3} = 0$. Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = -(10+\sqrt{3})$, $c_1 = 23+10\sqrt{3}$, $d_1 = -23\sqrt{3}$ - коэффициенты кубического уравнения. Тогда если у него есть 3 корня x_1, x_2, x_3, то справедлива теорема Виета для многочленов - в частности, для кубического:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b_1}{a_1} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c_1}{a_1} \\ x_1x_2x_3 = \frac{-d_1}{a_1} \end{cases}$$

- в левых частях уравнений сумма всех возможных группировок из 1, 2, 3 ~~их~~ корней, а в правых частях ~~[illegible]~~ $\frac{-b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{-d}{a}$).

Давайте проиллюстрируем эту теорему примером

87-93-87-63 (163)

Чистовик (6).

№2.) (продолжение)

Пусть $x^3-2x^2-5x+6=0$ (как несложно заметить, корни равны -2, 1 и 3). Тогда x_1+x_2+
$+x_3=-2+1+3=2=\frac{-(-2)}{1}$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-2+3-6=$
$=-5=\frac{-5}{1}$, $x_1x_2x_3=-6=\frac{-6}{1}$.

Итак, мы можем воспользоваться теоремой Виета для нахождения объёма:
$(a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ac+$
$+a+b+c+1=1+\frac{-b_1}{a_1}+\frac{c_1}{a_1}+\frac{-d_1}{a_1}=1+\frac{-b_1+c_1-d_1}{a_1}=$
$=1+\frac{10+\sqrt{3}+23+10\sqrt{3}+23\sqrt{3}}{1}=34+34\sqrt{3}=$
~~$=34(1+\sqrt{3})$.~~

Ответ: Объём может принимать значение $34+34\sqrt{3}$.

№4.). Давайте рассмотрим все возможные случаи, когда ~~первое~~ произведение этих чисел даёт остаток 1 при делении на 11. ~~число~~ Обозначим: $x=\overline{793a}$, $y=\overline{1b09}$. ~~Если~~ Если $x\equiv1 \pmod{11}$, то $y\equiv1 \pmod{11}$, иначе $xy\not\equiv1 \pmod{11}$.
Если $x\equiv2 \pmod{11}$, то $y\equiv6 \pmod{11}$.

№1.)(продолжение) чистовик (6)

Если $x \equiv 3 (mod 11)$, то $y \equiv 4 (mod 11)$. Если $x \equiv 4 (mod 11)$, то $y \equiv 3 (mod 11)$. Если $x \equiv 5 (mod 11)$, то $y \equiv 9 (mod 11)$. Если $x \equiv 6 (mod 11)$, то ~~решений нет (в любом случае $xy \not\equiv 1 (mod$~~ $y \equiv 2 (mod 11)$. Если $x \equiv 7 (mod 11)$, то $y \equiv 8 (mod 11)$. Если $x \equiv 8 (mod 11)$, то $y \equiv 7 (mod 11)$. Если $x \equiv 9 (mod 11)$, то $y \equiv 5 (mod 11)$. Если $x \equiv 10 (mod 11)$, то $y \equiv 10 (mod 11)$. Если $x \equiv 0 (mod 11)$, то $xy \vdots 11$, это не подходит.

Итак, мы получили следующие пары: 11, 26, 34, 43, 59, 62, 78, 87, 95, 10 10. По признаку равноостаточности при делении на 11, остаток от деления числа на 11 равен остатку от деления его знакопеременной суммы на 11 (для 1-20 числа она равна $9+a-7-3=$ $=a-1$, для 2-20 числа равна $b+9-1=8+b$. Из этого по остатку от деления числа на 11 можно узнать остаток от деления $a-1$ и $8+b$ на 11 и, соответственно, найти b и a.

Для пары 11, $a=2$, $b=4$, 24 - составное.

Для пары 26, $a=3$, $b=9$, 39 - составное.

Для пары 34, $a=4$, $b=7$, 47 - простое

Для пары 43, $a=5$, $b=6$, 56 - составное

Для пары 59, $a=6$, $b=1$, 61 - простое

Чистовик (7)

№4.) (продолжение). Для пары 6 2, а = 7, в = 5, 75 — составные.

Для пары 7 8, а = 8, в = 0, 80 — составные.

Для пары 8 7, а = 9, ~~в = 1~~ в не может принимать значения от 0 до 9, не подходит.

Для пары 9 5, а = 0, в = 8, не подходит (двузначное число не может начинаться с нуля).

Для пары 10 10, ~~а = 1, в =~~ а не может принимать значения от ~~1~~ 0 до 9, не подходит.

Итак, мы выяснили, что ~~нам подходят~~ могли получиться 2 простых числа — 47 и 61.

Ответ: 47, 61.

№6.) — А.) Петя выиграет после 1-го хода, если у него очков больше, чем у Васи. Давайте нарисуем таблицу, в которой для каждого выбранного Петей числа будут все возможные Васины ходы, которые проигрывают сразу.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
—	—	11	11 12 11	11 12 13 21 22 31	11 12 13 14 21 22 23 31 32 41	11 12 13 14 15 ~~11~~ 21 22 23 24 31 32 33 41 42 51	кроме 66, 65, 64, 63, 62, 56, 55, 54, 53, 46, 45, 44, 36, 35, 26.	кроме 66, 65, 64, 63, 55, 54, 56, 46, 45, 36.	кроме 66, 65, 56, 64, 46, 55.	кроме 66, 56, 65	кроме 66

Черновик

1 – ..
2 – 11
3 12, 21
4 13, 22, 31
5 14, 23, 32, 41.
6 15, 24, 33, 42, 51.
7
8
9
10
11
12.

1
2
3
4
5
6
5
4
3
2.
1.

$\frac{1}{12}\left(\frac{(1+2+3+4+5)\cdot 2+6)}{36}\right) =$

$= \frac{1}{12}\cdot 1 = \frac{1}{12}.$

1440+288.

$\frac{6}{12}.$

$\frac{6}{12} + \frac{1}{12}\cdot\frac{6}{12} +.$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

1, 6, 11, 6. черновик

-6, 11, -6.

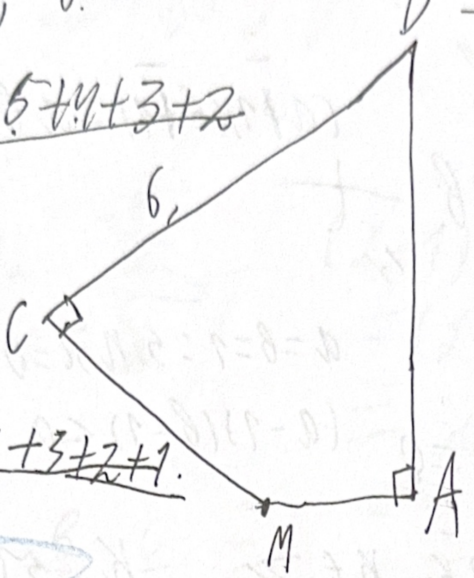
~~6+6+5+4+3+2~~

$(x+1)(x+2)(x+3) =$

$= (x^2+3x+2)(x+3) =$

$= x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6 =$

$= x^3+6x^2+11x+6.$



$-1 \cdot -2 \cdot -3 = -6. \ -6.$

$2+6+3=11.$

~~6+5+4+3+2+1.~~

1 – ...

2 – ...

3 – 11

4 – 11, 12, 21

5 – 11, 12, 13, 21, 22, 31.

6 – 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 31, 32.

7 – 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, ~~34~~, 41, 42, ~~43~~. 51.

8 – ~~....~~ ~~6+5~~. 21.

9 – ~~2~~6.

10 –

11 –

12 –

6+6+6+5+4+3.

23+7.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36

5 6. 82

112, 145

$\frac{1}{12}\left(\frac{1+3+6+10+15+21+26+30+33+35}{36}\right) =$

$= \frac{1}{12}\left(\frac{180}{36}\right) = \frac{5}{12}.$

1

2

3 – 1

4 – 3

5 – 6

6 – 10

7 – 15

8 – 21

9 – 26

10 – 30

11 – 33

12 – 35.

черновик

$2^{2a}+7^{2a}+1$ $\quad 2^{\sin x}=a, \quad 7^{\sin x}=b.$

$a^2+b^2+1=ab+a+b.$ $\quad (a+1)(b+1)=ab+a+b+1$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$

$a^2+b^2-ab-a-b+1.$ $\quad a=b=1: \sin x=0.$

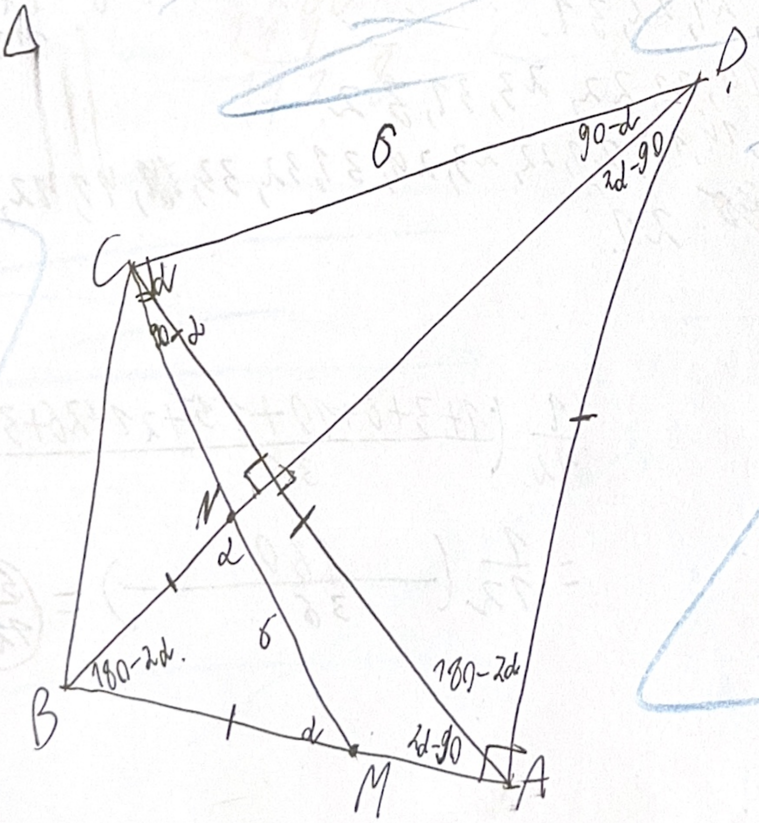
$(a-b)^2+(a-1)(b-1)=0.$ $\quad (a-1)(b-1)<0.$

$\sin x=0$ $\quad \cdot 2\pi k, \; k\in\mathbb{Z}.$ $\quad k=50.$

$100\pi.$ $\quad k=0,1,2,\dots,50=51.$

$100\cdot 3{,}1415.$ $\quad 314,\dots$

$\triangle BNM=\triangle ACD.$



Черновик

$\cancel{x^2+\frac{1}{2}x+1=0}$ $\quad (x-1)(x+2)=x^2+x-2=0$

$\frac{-b}{a}$ $\frac{c}{a}$ $\quad 1, -2 \quad 1, -2, 3$

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ $\quad (x-1)(x+2)(x-3)=$

$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ $\quad =(x^2+x-2)(x-3)=$

$= x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6=$

$= x^3-2x^2-5x+6$

$\frac{-b}{a}$ $\frac{c}{a}$ $\frac{-d}{a}$ $\quad 1, -2, -5, 6.$

$2, -5, -6$ $\quad \dots$

$x_1x_2x_3=-6, \quad x_1+x_2+x_3=2, \quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=$

$\cancel{x_1x_2x_3=}$ $\quad =-2+3-6=-5.$

$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}$

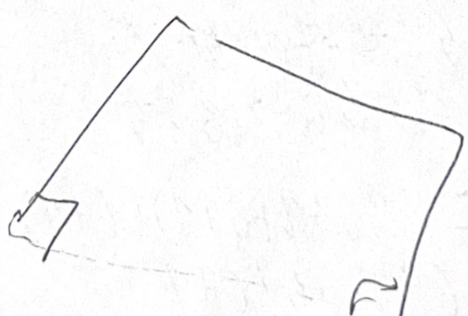
$x_1x_2x_3=\frac{c}{a}$ $+$ $\quad \frac{-b+c-d}{a}$ $+1.$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{-d}{a}$ $=$

$\cancel{x^3-11}$

$1, -(10+\sqrt{3}), 23+10\sqrt{3}, -(23\sqrt{3}).$ $\quad \frac{10+\sqrt{3}+23+10\sqrt{3}+23\sqrt{3}}{a}=$

$=$



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$\sin x = a$, $2^{2a}+7^{2a}+1 = ~~14^a~~+2^a+7^a$

$2^a \cdot 7^a$

$x = y$

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100,

$x^2+y^2+1 = xy+x+y$

1 · 1

258 253

2 · 6 $a=3,\ b=9$

3 · 4 4, 7

5 · 9 6, 1

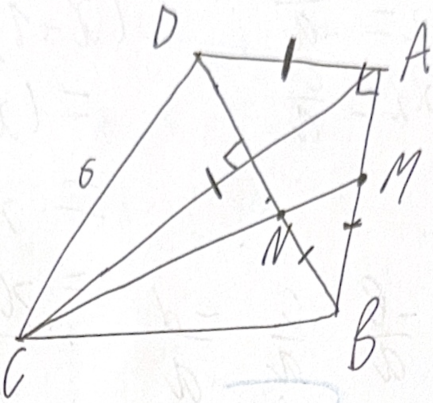
7 · 8 8, 9

6 · 2 7, 5

4 · 3 5, 6

9 · 5

8 · 7 9, ...



$1-a$ $-8-b$

~~a7a~~ ~~8Ab~~ ~~bAa~~

$a-1$ $b+8$ $\vdots 4$

~~12-9~~

$a-1$

$a=3,\ b=7$

$a=6,\ b=$

5 5

9, 1

$2^{2a}+7^{2a}+1 = 14^a+2^a+7^a$

$2^{2a}-2^a+7^{2a}-7^a = 14^a-1$

$2^a(2^a-1)+7^a(7^a-1) =$

Кол-во чисел, кратных 5 не уменьшается

~~a:5~~ $a \vdots 5,\ b \vdots 5 \Rightarrow 5a-3b,\ 7a-5b \vdots 5$

$a \vdots 5,\ b \not\vdots 5 - 7a-5b \vdots 5$

$a \not\vdots 5,\ b \vdots 5 - 5a-3b \vdots 5$

$(a+1)(b+1)(c+1) = (ab+a+b+1)(c+1) = abc+$
$abc+ab+ac+bc+a+b+c+1$

Чистовик (8).

№6.) (продолжение). Теперь, мы для каждого числа от 1 до 12 - количество выбитых Петей очков, знаем число проигрывающих ходов Васи; пусть для 1, 2, 3, ..., 12 их $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ соответственно (эти числа можно найти с помощью таблицы), тогда вероятность Петиной победы рассчитывается так: $\frac{1}{12}\cdot\frac{a_1}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{a_2}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{a_3}{36}+\ldots+\frac{1}{12}\cdot\frac{a_{12}}{36}$ ($\frac{1}{12}$ - вероятность Пети выбить целое число от 1 до 12, $\frac{a_{12}}{36}$ — вероятность Васи выбить ~~число~~ проигрывающее число) $=\frac{1}{12}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{12}}{36}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{1+3+6+10+15+21+26+30+33+35}{36}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{180}{36}\right)=\frac{5}{12}$.

Б.) Чтобы победителя не было, нужно, чтобы на каждом ходу у Пети и Васи было одинаковое число очков. ~~Тогда~~ Можно опять составить таблицу, где для каждого ~~Васиного~~ Петиного хода написаны все Васины ходы, когда достигается равенство очков.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
–	11	12 21	13 22 31	14 23 32 41	15 24 33 42 51	16 25 34 43 52 61	26 35 44 53 62	36 45 54 63	46 55 64	65 56	66.

Чистовик (9).

№6.) (продолжение). Теперь можно найти ответ аналогично пункту а.) : пусть $b_1, b_2, \dots, b_{12}$ – числа комбинаций при которых у Вас столько же очков, сколько у Пети, тогда на 1-м ходу вероятность того, что очки совпадут, равна $\frac{1}{12} \cdot \frac{b_1}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{b_2}{36} + \dots + \frac{1}{12} \cdot \frac{b_{12}}{36} = \frac{1}{12}\left(\frac{b_1+b_2+\dots+b_{12}}{36}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{36}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{36}{36} = \frac{1}{12}$.

Таким образом, вероятность того, что на 1-м ходу совпадут очки, равна $\frac{1}{12}$, аналогично для 2 и 3 хода т.е. вероятность того, что победителя не будет равна $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728}$.

в.) Из предыдущих пунктов мы знаем, что вероятность победы Пети на текущем ходу равна $\frac{5}{12}$, вероятность ничьей равна $\frac{1}{12}$, поскольку всего 3 исхода, то вероятность выигрыша Вам на текущем ходу равна $1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$. Т.к. $\frac{1}{2} > \frac{5}{12}$, то у Вас вероятность выиграть больше.

Чистовик. 10

№6.)(продолжение). Теперь посчитаем ~~эту~~ эту вероятность. Он может выиграть после 1-го, после 2-го или после 3-го хода. В первом случае вероятность равна $\frac{1}{2}$, во 2-м случае равна $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$ (сначала ничья, потом победа Васи), в 3-м случае равна $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$ (сначала 2 ничьих, потом победа Васи). Итоговая вероятность победы Васи равна $\frac{1}{2}+$

$$+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{144}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{144+12+1}{144}\right)=\frac{157}{288}$$

Ответ: А.) $\frac{5}{12}$. Б.) $\frac{1}{1728}$. В.) $\frac{157}{288}$