0875439380005

87-54-39-38
(164.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е-4

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Хатеева Святослава Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«05» апреля 2026 года

Подпись участника
Хт

80 (восемьдесят)



87-54-29-38 (16.2)

Черновик 1 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sin x} + \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sin x} + 1 = \left(\frac{1}{15}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x}$

точно $\sin x = 0$ $\quad t_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$ $\quad t_2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x}$

$$t_1^2 + t_2^2 + 1 = t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2$$

$t_1 > 0, t_2 > 0$ $\quad t_1 < 1$: $\quad t_1 > t_1^2$

$t_2 > t_1 \cdot t_2$

$$t_1^2 - 2t_1 \cdot t_2 + t_2^2 = t_1 + t_2 - t_1 \cdot t_2 - 1$$

$$(t_1 - t_2)^2 = t_1 + t_2 - t_1 \cdot t_2 - 1$$

$t_1^2 + t_2^2 \geq 2t_1 \cdot t_2$ $\quad (t_1 - 1)\cdot(t_2 - 1) >$

$1 + \cancel{2}t_1 \cdot t_2 = t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2$

$1 + t_1 \cdot t_2 = t_1 + t_2$ $\quad t_1 \cdot (1 - t_2)$

$1 + t_1 \cdot (t_2 - 1) - t_2 = 0$

$(t_1 - 1)\cdot(t_2 - 1) = 0$

$1 + \cancel{2}t_1 \cdot t_2 \geq \cancel{t_1 \cdot t_2} + t_1 + t_2$

$(t_1 - 1)\cdot(t_2 - 1) \geq 0$

$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} - 1\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x} - 1\right) \geq 0$

$\sin x > 0$: $\frac{1}{3} - 1 < 0, \ldots$ $- \theta$ $\quad \sin x = 0\ \theta$

$\sin x < 0$: $\left(3^{|\sin x|} - 1\right)\cdot\left(5^{|\sin x|} - 1\right) \geq 0$ – верно

2) $x^3 - (8 + \sqrt{2})x^2 + (13 + 8\sqrt{2}) - 13\sqrt{2} = 0$ $\quad a =$

$a + b + c = 8 + \sqrt{2}$ $\qquad c = \sqrt{2}$

$ab + bc + ac = 13 + 8\sqrt{2}$ $\qquad ab = 13 \quad a + b = 8$

$abc = 13\sqrt{2}$ $\qquad a = 8 - b$

$8b - b^2 = 13$

$\frac{64 - 12}{4} = 13$ $\qquad b^2 - 8b + 13 = 0$

$64 - 52 = 12$

$\sqrt{2} + 1, \ 5 \pm \sqrt{3}$ $\qquad b = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$

Чистовик Лист 1

1) пусть $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} = t_1$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x} = t_2$, тогда

имеем уравнение:

$$t_1^2 + t_2^2 + 1 = t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2$$

т.к. $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, по нер-ву о средних

$t_1^2 + t_2^2 \geq 2 t_1 \cdot t_2$

тогда $t_1^2 + t_2^2 + 1 \geq 2t_1 \cdot t_2 + 1$

Докажем, что $2t_1 \cdot t_2 + 1 \geq t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2$

$$t_1 \cdot (t_2 - 1) + 1 - t_2 \geq 0$$

$$(t_1 - 1) \cdot (t_2 - 1) \geq 0$$

$\left.\begin{array}{l} \sin x > 0: t_1 < 1,\ t_2 < 1 - \text{верно} \\ \sin x = 0: t_1 = 0,\ t_2 = 0 - \text{верно} \\ \sin x < 0: \underset{3^{|\sin x|} > 1}{t_1 > 1},\ \underset{5^{|\sin x|} > 1}{t_2 > 1} - \text{верно} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$2t_1 \cdot t_2 + 1 \geq t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2 \text{ всегда} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. $t_1^2 + t_2^2 + 1 \geq 2t_1 \cdot t_2 + 1$, нужно везде равенство, т.е. $2t_1 \cdot t_2 + 1 = t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t_1 - 1) \cdot (t_2 - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\qquad \Rightarrow t_2 = 1 \Rightarrow$ это единственное решение

$-99\pi > -314 > -100\pi$ $\qquad \pi < 3{,}75 < 2\pi$

т.е. от $-99\pi$ до $\pi$ $\qquad 1 - (-99) + 1 = 101.$

Ответ: 101.

2) $x^3 - (8 + \sqrt{2})x^2 + (13 + 8\sqrt{2})x - 13\sqrt{2} = 0$

по т. Виета

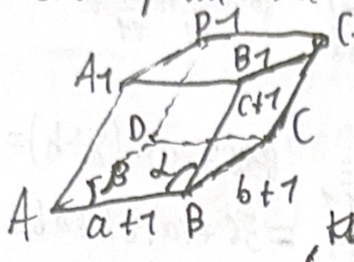
$\begin{cases} a + b + c = 8 + \sqrt{2} \\ ab + bc + ac = 13 + 8\sqrt{2} \\ abc = 13\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$ $\qquad (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 =$

$= 21 + 22\sqrt{2} + 1 = 22 \cdot (1 + \sqrt{2})$

87-54-39-38 (1642)

Чистовик   Лист 2

посмотрим на наш параллелепипед:




$V=(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$(\beta=\angle DAB,\ \alpha=\angle ABB_1)$ ~~где sin α при~~

~~принимает значения~~

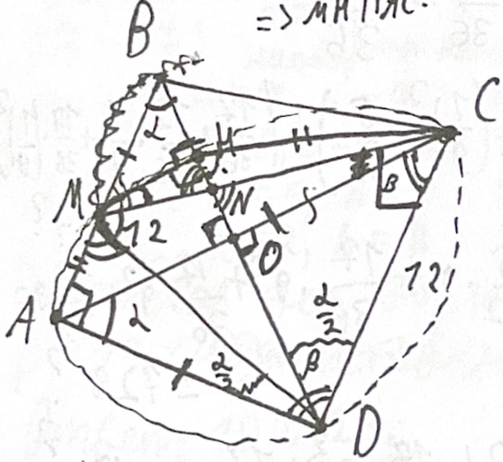
где $\sin\alpha\in(0;1]$, $\sin\beta\in(0;1]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow V\in(0;\ 22(1+\sqrt{2})]$

Ответ: объём принимает все положительные значения, не большие чем $22\cdot(1+\sqrt{2})$.

3)

$MH\perp BD\Rightarrow MH\parallel AC$.   $DC=12$   $O=BD\cap AC$




пусть $\angle ABD=\alpha$, тогда

$\angle CAD=90^\circ-\angle BAO=\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow\triangle CAD=\triangle NBM$ по 2 сторонам и углу $\Rightarrow$

$\Rightarrow MN=12$

$\angle ADC=\beta$, но $\angle ADC=\angle BMN\Rightarrow$

$\Rightarrow\angle AMC=\angle 180^\circ-\angle BMN=180^\circ-\beta\Rightarrow$

$\Rightarrow\angle AMC+\angle ADC=180^\circ\Rightarrow$

$\Rightarrow AMCD$ — вписанный.

$H\in(AMCD)$, т.к. $\angle MHD=\angle MCD=90^\circ$

тогда $AM=CH$

т.к. $CO$ — высота в прямоуг. $\triangle CND$:

$144=CD^2=OD\cdot DN=OD\cdot(OD+ON)=OD\cdot(BD-BN)=$

$\left(S=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{AD\cdot BD}{2}=\frac{BN\cdot BD}{2}\right)=OD\cdot(BD-AD)=$

$=MH\cdot(BD-AD)=$

$=MH\cdot ND$

$OD=MH$ (как соотв. линии в равных $\triangle$)

$AD^2=OD\cdot BD$   $AD^3=BD\cdot AD\cdot OD$   $\frac{BD\cdot AD}{2}=\frac{AD^3}{2OD}$

$\frac{MH}{MN}=\frac{MH}{12}=\frac{CO}{ON}\Rightarrow MH\cdot ON=12\,OC$

$MH\cdot ND=MH\cdot(NO+OD)=MH^2+MH\cdot ON=MH^2+12OC=$

$=OD^2+12OC=144+12OC-OC^2$

$OC=HN$ ...

Черновик 2

$p = \overline{ab}$ $\quad 1800 \equiv_{11} \cancel{11}\ 18 \equiv_{11} 7 \quad 78 \equiv_{11} 1$

$4070 \vdots 11?$ $\quad 4000 \equiv_{11} 40 \equiv_{11} 7$

$p = 10a + b$

$p = 10b + a$

$\overline{180a} \cdot \overline{4b78} \equiv_{11} 1$

$(7+a)(\overline{4b78}) \equiv_{11} 1$

$(7+a) \cdot (4000 + b \cdot 100 + 70 + 8) \equiv_{11}$ $\quad (7+a) \cdot (8+b) = 56 + 7a + 8b + ab \equiv 5 + 7a + 8b + ab$

для 11:

$(7+a) \cdot (8+b)$ $\quad a=0, b=0$ $\quad \cancel{7 \cdot 8}$ $\quad 13 \cdot 17$

$2 \cdot 6 \quad 5 \cdot 9$

$3 \cdot 4 \quad \cancel{7 \cdot 8}$

$1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{9} =$ $\quad \frac{5}{12} + \frac{1}{9} = \frac{19}{36} \Rightarrow$

$10 + 10 + 36 + 56 + 68 = 20 + 92 + 68 = 180 \Rightarrow \frac{17}{36}$

$45 \cdot 3 = 135$

$\frac{5 \cdot 91}{12 \cdot 81} = \frac{455}{972} = \frac{1365}{2916}$ $\quad 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{9}$ $\quad \frac{17}{36} \quad \frac{5}{12}$

$\left(\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^3\right) + ($ $\quad \frac{36}{36} - \frac{19}{36} = \frac{17}{36}$

$+ \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{12} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{5}{12}\right) + \left(\frac{17}{36} + \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{9} + \frac{17}{36} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$

$81 + 9 + 1 + \frac{5 \cdot 9^3}{12} + \frac{5}{12} \cdot 9^2 + \frac{5}{12} \cdot 9 + \frac{17}{36} \cdot 9^3 + \frac{17}{36} \cdot 9^2 + \frac{17}{36} \cdot 9 = 7?$

$= 729?$

$91 + \frac{5}{4} \cdot 3^5 + \frac{5}{4} \cdot 3^3 + \frac{5}{4} \cdot 3 + \frac{17}{4} \cdot 9^2 + \frac{17}{4} \cdot 9 + \frac{17}{4} = 729 / \cdot 4$ ?

$364 + 5 \cdot (243 + 273) + 17 \cdot (81 + 9 + 1) = 2916$

$\cancel{364}$ $\quad 91 \cdot 21 + 5 \cdot 516 = 2916$

$1800 \ldots \quad 2580$

$12 \cdot 36$ – всего $\quad 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 26 + 30 + 33 + 35$

$1 + 3 = 4 \quad 4 + 6 = 10 \quad 20 \quad 35 \quad 56 \quad 82 \quad 112 \quad 145 \quad 180$

$12^3 = 27 \cdot 64 = 1440 + 288 = 1740 - 12 = 1728$

87-54-39-38 (16нд)

Чистовик лист 3

ч/р = $\overline{ab}$ или $p = \overline{ba}$

т.к. 11 простое, легко вспомнить все пары чисел, обратных по mod 11.

$\overline{180a} = (1800+a) \underset{11}{\equiv} a+7$

$\overline{4b78} = (4078+100b) \underset{11}{\equiv} b+8$

($a \cdot b \underset{11}{\equiv} 1$ тогда a и b - обратные)

$(a+7)\cdot(b+8) \underset{11}{\equiv} 1$

a≠6, b≠4
46 и 64 не подх.

ещё 1·1 (12·12)
и 10·10
a = 3, 32 - нет
b = 2, 23 - да

возможные варианты остатков:

где a+7 и b+8 в каком-то порядке дают эти остатки по модулю 11)

2·6 (13·17)   5·9 (16·9 или 16·20)

3·4 (14·15)   7·8 (или 18·19)

a+7 - от 7 до 16

b+8 - от 8 до 17 => 16·20, 18·19 - сразу нет

если 7·8, то a = b = 0 - тоже нет

остались:

a = 6, b = 9 => p ⋮ 3, p > 3 - противоречие

13·17: наоборот нельзя, т.к. a+7 ≤ 16

14·15: a = 7, b = 7 => 77 - не простое

a = 8, b = 6 => p ⋮ 2

16·9: a = 9, b = 1: 19 - да   91 = 7·13 - нет

a = 2, b = 8 - кратно 2 => не простое

Перебрав все возможные варианты, имеем p = 19 ~~- единственный ответ~~ и p = 23 - единственные варианты.

Ответ: 19 и 23.

5) а) ~~для 2: $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{36}$~~

~~3: $\frac{1}{12}$ $\frac{2}{36}$~~

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Для каждого значения у Бом считаем подходящие у Оли (для 1 и 2 их 0, т.к. у Оли ≥ 2 очка)

кол-во вариантов, когда у Оли меньше чем у Бом / 36 - общее кол-во

для 3, для 4, для 5 ... для 12

$$\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{6}{36}+\frac{10}{36}+\frac{15}{36}+\frac{21}{36}+\frac{26}{36}+\frac{30}{36}+\frac{33}{36}+\frac{35}{36}\right) =$$

$$= \frac{1}{12\cdot 36}\cdot(1+3+6+10+15+21+26+30+33+35) =$$

$$= \frac{\cancel{180}\,5}{12\cdot \cancel{36}} = \frac{5}{12}$$

б) для 2, для 3 ...

$$\frac{1}{36\cdot 12}(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1) = \frac{36}{36\cdot 12} = \frac{1}{12}$$

- ничья на первом ходу.

На втором - $\left(\frac{1}{12}\right)^2$ и т.д. Ничья после n-го хода это $\left(\frac{1}{12}\right)^n$

~~Вероятность, что никто не победит, это~~

$\left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{3^6} = 3^{-6}$

$\frac{455}{4} = 100+10+3{,}75$

~~Общая вероятность победы для Пам!~~

$\frac{5}{12} + \frac{1}{9}\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{81}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{12}\cdot\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}\right) = \frac{5}{12}\cdot\left(\frac{91}{81}\right) = \frac{5\cdot 91}{12\cdot 81} = \frac{455}{972} = \frac{1365}{2916}$

~~Ничьи:~~ $\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729} = \frac{81+9+1}{729} = \frac{91}{729} = \frac{364}{2916}$

~~для Оли:~~ $1 - \frac{90}{729} - \frac{5\cdot 91}{12\cdot 81} = \frac{729}{729} - \frac{90}{729} - \frac{5\cdot 91}{729}\cdot\frac{3}{4} =$

$= \frac{1}{729}\cdot\left(729-90-\frac{5\cdot 91}{4}\right) = \frac{639-113{,}75}{729} = \frac{525{,}25}{729} =$

$= \frac{2101}{2916}$

Чистовик

Лист 4

Получаем $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = 12^{-3}$ - вероятность, что никто не победит.

в) Общая вероятность победы для Пам:

$\frac{5}{12}\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{144}\right) = \frac{5}{12}\cdot\left(\frac{144+12+1}{144}\right) = \frac{5\cdot 157}{1728} = \frac{785}{1728}$

для Оли: $1-\frac{5}{12}-\frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ - после 1-го раунда

а всего $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{157}{144}\right) = \frac{157}{288} \overset{6}{=} \frac{942}{1728} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ у Оли она больше и равна $\frac{157}{288}$.

Ответ: а) $\frac{5}{12}$ б) $12^{-3}$ в) $\frac{157}{288}$.