0 966851 690008

96-68-51-69
(162.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

ШЕРСТОБИТОВА ВЛАДИМИРА СЕРГЕЕВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

работа сдана в 13 00

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

80 (восемьдесят)

96-68-51-69
(162.1)

Задача 1. Пусть ϑ_1 – скорость пешехода, ϑ_2 – скорость велосипедиста. ~~ϑ_2 скорость, которую нужно найти~~.

Запишем и решим уравнение для первой ситуации:

$\vartheta_1 \cdot (10ч\ 30мин - 9ч\ 15мин) = \vartheta_2 \cdot (10ч\ 30мин - 10ч\ 15мин)$

$\Rightarrow \vartheta_1 \cdot 75мин = \vartheta_2 \cdot 15мин \Rightarrow \vartheta_2 = 5\vartheta_1$.

Пусть t – время, в которое нужно выехать велосипедисту, тогда запишем следующее уравнение:

$\vartheta_1 (10ч\ 30мин - 9ч\ 15мин) = \vartheta_2 (10ч\ 00мин - t) \Rightarrow$

$\Rightarrow 45мин = 5 \cdot (10ч\ 00мин - t) \Rightarrow t = 9ч\ 51мин.$

Ответ: велосипедисту нужно было выехать в 9:51.

Задача 2. Рассмотрим два случая:

1) $n \vdots 4001 \Rightarrow n(n+4001) \vdots 4001^2$; если $n(n+4001) = k^2$, то и $\frac{n(n+4001)}{4001^2} = \left(\frac{k}{4001}\right)^2$, т.е. мы можем рассматривать число $m(m+1)$, $m = \frac{n}{4001}$; пусть p – некоторое фикс. простое число, тогда рассмотрим степень вхождения его в m; ~~он р~~ пусть оно равно λ, тогда очевидно, что степень вхожд-я p в $(m+1)$ равно 0, так как ~~НОД $(m, m+1) = 1$~~, m и $(m+1)$ взаимно просты; $m(m+1)$ – квадрат $\Rightarrow$ все простые должны входить в него в чётной степени $\Rightarrow m = x^2, m+1 = y^2$ (по доказанному выше); но разница между двумя квадратами натуральных чисел хотя бы три $(4-1)$, т.е. такого быть не может $\Rightarrow m(m+1)$ не может быть квадратом натурального числа $\Rightarrow n(n+4001) = 4001^2 m(m+1)$ также не может им быть.

2) $n \vdots 4001 \Rightarrow (n+4001) \vdots 4001 \Rightarrow$ степень вхождения 4001 в число $n(n+4001)$ равна 2; теперь рассмотрим простое число $p \neq 4001$ и проведем такие же рассуждения, как в случае (1); тогда $n = x^2$, $n+4001 = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 4001 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 4001$, $y, x \in \mathbb{N}$; если так, то $y - x > 0$ (иначе $(y-x)(y+x) = 4001 < 0$) $\Rightarrow y > x$; при этом $(y-x)$ и $(y+x)$ – положительные делители 4001 $\Rightarrow$ одно из них равно 1, второе – 4001; решим совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1, \\ x+y=4001; \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=4001, \\ x+y=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2001, \\ y=2000; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2001, \\ y=-2000; \end{cases} \text{– не подходит, т.к. } y \notin \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Тогда единственный ответ: $x = 2001$; $y = 2000 \Rightarrow$ ~~$n = 2000^2$~~

$n = 2000^2 = 4000000$.

$\boxed{\text{Ответ: } 4000000.}$

Задача 4. ~~Другие~~ Рассмотрим четыре случая:

1) $a \vdots 5$, $b \vdots 5 \Rightarrow 5a - 3b \vdots 5$, $7a - 5b \vdots 5$;

2) $a \vdots 5$, $b \not\vdots 5 \Rightarrow 5a - 3b \not\vdots 5$, $7a - 5b \vdots 5$;

3) $a \not\vdots 5$, $b \vdots 5 \Rightarrow 5a - 3b \vdots 5$, $7a - 5b \not\vdots 5$;

4) $a \not\vdots 5$, $b \not\vdots 5 \Rightarrow 5a - 3b \not\vdots 5$, $7a - 5b \not\vdots 5$;

Рассмотрены все $4 = 2 \cdot 2$ случая кратности a и b на 5; заметим, что если ~~было~~ среди a и b было $k \in \{0; 1; 2\}$ чисел, кратных пяти, то столько и осталось; в ряду $15, 16, \ldots, 40$ – 6 чисел, кратных пяти (15, 20, 25, 30, 35, 40), а в ряду $2001, 2026$ – 5 чисел (2005, 2010, 2015, 2020, 2025), т.е. количество

96-68-51-69 (162.1)

чисел, кратных пяти, изменилось, а такого быть не может.

$\boxed{\text{Ответ: нет.}}$

Задача 3. $\forall k \in \mathbb{N}$ оценим разницу $a_{k+1} - a_k$:

снизу: $a_{k+1} - a_k = k+1 + \text{Окр}(\sqrt{k+1}) - (k + \text{Окр}(\sqrt{k})) =$
$= 1 + \underbrace{\text{Окр}(\sqrt{k+1}) - \text{Окр}(\sqrt{k})}_{\geq 0} \geq 1;$

Сверху: $a_{k+1} - a_k = \ldots = 1 + \underbrace{\text{Окр}(\sqrt{k+1}) - \text{Окр}(\sqrt{k})}_{\leq 1} \leq 1+1 = 2.$

Из этого следует, что либо ~~a_{k+1}~~

$a_{k+1} - a_k = 1$, либо $a_{k+1} - a_k = 2$;

Рассмотрим $K = h^2, h \in \mathbb{N}$, тогда часть последовательности от a_k до a_{k+h} - послед. нат. чисел) в самом деле, по определению последовательности $a_k = k + \text{Окр}(\sqrt{k}) = h^2 + h$, $a_{k+1} = h^2 + 1 + \text{Окр}(\underbrace{\sqrt{h^2+1}}_{\leq \sqrt{h^2+h+\frac{1}{4}} = (h+\frac{1}{2})^2})$
$= h^2 + h + 1, \ldots, a_{k+h} = h^2 + h + \text{Окр}(\sqrt{\underbrace{h^2+h}_{\leq (h+\frac{1}{2})^2}}) = h^2 + 2h;$

рассмотрим a_{h^2+h+1}:

$a_{h^2+h+1} = h^2 + h + 1 + \text{Окр}(\sqrt{h^2+h+1}) = h^2 + 2h + 2$, т.е. $a_{h^2+h+1} - a_{h^2+h} = 2$; ($h^2+h+1 > (h+\frac{1}{2})^2$, $< (h+1)^2$) рассмотрим часть послед-сти от a_{h^2+h+1} до a_{h^2+2h+1}; по аналогичным рассуждениям, она тоже - последовательные нат. числа.

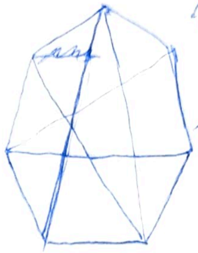
Из вышесказанного следует, что $\forall h \in \mathbb{N}$: a_{h^2+h+1}, $a_{h^2+h+2}, \ldots, a_{h^2+3h+2}$ - последовательные натуральные числа, а $a_{h^2+3h+3} - a_{h^2+3h+2} = 2$; между a_{h^2+3h+2} и a_{h^2+h+1} (включая их) - $2h+2$ чисел, то есть $2h+2 \geq 2026 \Rightarrow h \geq 1012$, и $h = 1012$ - минимальное значение $\Rightarrow k = h^2 + h + 1 = 1012^2 + 1012 + 1 =$
$= 1024144 + 1012 + 1 = 1025157$. $\boxed{\text{Ответ: } 1025157.}$

ЧЕРНОВИК

$T_1 = T_2 + 1$ ч, — работа вожатых

v_1, v_2 — вожатых

u_1, u_2 — пар. мусора



$14 \le t_2 \le \frac{4}{3}$ ч

$1 \le T_1 \le \frac{4}{3}$

$\frac{5}{2} \le T_2 \le \frac{10}{3}$

$\frac{7}{2} \le T_2 + 1 \le \frac{13}{3}$

$a + b \to 12a - 8b$

$\frac{3}{10} \le \frac{1}{T_2} \le \frac{2}{5}$

$S \to$

$\frac{21}{20} \le \frac{T_1}{T_2} \le \frac{26}{15}$

$3 \le 7$

100

$\begin{array}{r} 1012 \\ +1013 \\ \hline 3036 \\ 1012 \\ 0000 \\ +1012 \\ \hline 1025156 \end{array}$

9:51 мин

~~$\frac{7}{4} v_1 T_1 = v_1 (T_1 - t_1)$~~,

1024000

1156

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{29}{20}$

$29T_2 = 20T_2$

$\frac{7}{2} \le T_2 + 1 \le \frac{13}{3}$ ч

v_1 — п.

v_2 — в.

$\frac{1}{T_2} \ge \frac{3}{10}$ ч

$\frac{2}{5}$ $\frac{13}{3}$

$n^2 + n + 1$

$\frac{7}{4} v_1 T_1 = \frac{7}{4} v_1 (T_1 - t_1)$,

$\frac{5}{3} v_2 T_2 = v_2 (T_2 - t_2)$

1012^2

$\frac{26}{15} \ge \frac{T_2 + 1}{T_2} \ge \frac{21}{20} = 1{,}05$

$v_2 - v_1$

9:15 — 8 — А

10:15 — П

10:30 — Вст

$= 1000000 + 24000 + 144$

$= 1024144$

$v_1 \cdot 75$ мин $= v_2 \cdot 15$ мин

$v_2 = 5 v_1$

$v_1 T_1 = v_2 T_2$

253^2

$= 64009$

$n v T_1 = (49 - n) v T_2$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{49-n}{n}$

уменьшим $\frac{29}{20}$

$29T_2 = 20T_2 + 20$ $21, 31$

$9T_2 = 20 \Rightarrow T_2 = \frac{20}{9}$

$\frac{T_2+1}{T_2}$

ч — работа

1 3 8 2·3

$\underbrace{2, 3}, \underbrace{5, 6, 7, 8}, \underbrace{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, 18 \ldots$

$2 \cdot 10^{13}$

$\begin{cases} T_1 = \frac{7}{4}(T_1 - t_1), \\ T_2 = \frac{5}{3}(T_2 - t_2); \end{cases}$

$1012 \cdot 1013 + 1$

$\begin{cases} \frac{7}{4} t_1 = \frac{3}{4} T_1 \\ \frac{5}{3} t_2 = \frac{2}{3} T_2 \end{cases}$

$\begin{cases} t_1 = \frac{3}{7} T_1, \\ t_2 = \frac{2}{5} T_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{14 t_1}{15 t_2} = \frac{T_2 + 1}{T_2}$

$\frac{15 T_1}{14 T_2} = \frac{t_1}{t_2}$

$1 \le t_1 \le \frac{4}{3}$ ч $\Rightarrow \frac{3}{7}$ $\le \frac{4}{3}$ ч