0 920068 230006

92-00-68-23
(164.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Е – 4

дешифр

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Чапуриной Алёны Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«05» апреля 2026 года

Подпись участника

ЧсА

95 (девяносто пять)

92-00-68-23 (154.?)

$\boxed{\text{Стр 1}}$ Все листы — чистовые

№1

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{5}\right)^{2\sin x}+1=\left(\frac{1}{15}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x}$$

Зам: $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$, $b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x}$; $a, b>0$

$$a^2+b^2+1=ab+a+b$$

$$a^2-ab+b^2-a-b+1=0 \quad /\cdot 2$$

$$2a^2-2ab+2b^2-2a-2b+2=0$$

$$\Updownarrow$$

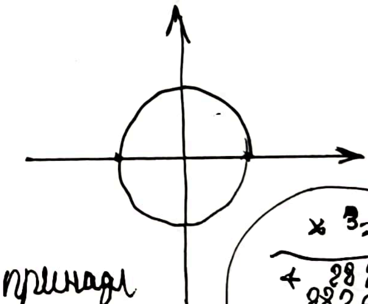
$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0$$

(это $a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1=0$)

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a=b \\ a=1 \\ b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}=1=\left(\frac{1}{3}\right)^{0} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x}=1=\left(\frac{1}{5}\right)^{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\sin x=0}$$



$x=\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$

Отрезку $[-314; 3,15]$ принадл

$$\boxed{-314\le \pi k\le 3,15}$$

$$\begin{array}{r} \times\; 3,14 \\ 99 \\ \hline +\;2826 \\ 2826 \\ \hline 310,86 \end{array}$$

$3,15>\pi>3,14$

$k=1 \Rightarrow \pi k<3,15$

$k\ge 2 \Rightarrow \pi k>3,15$

$\boxed{k\le 1}$

$$\frac{-314}{3,14}=\frac{-3,14\cdot 100}{3,14}=-100$$

$k=-100 \Rightarrow \pi k<-100\cdot 3,14=314$

$\boxed{k\ge -99}$

Зн, $k\in\{-99; -98; \ldots; 0; 1\} \Rightarrow$ для k

101 вар $\Rightarrow$ 101 реш

Ответ: 101.

Стр 2

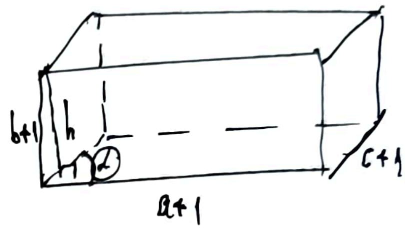
№2

$$x^3 + (13+8\sqrt{2})x = (8+\sqrt{2})x^2 + 13\sqrt{2}$$

$$x^3 - (8+\sqrt{2})x^2 + (13+8\sqrt{2})x - 13\sqrt{2} = 0$$

По Th Виета:

$$\begin{cases} a+b+c = 8+\sqrt{2} \\ ab+ac+bc = 13+8\sqrt{2} \\ abc = 13\sqrt{2} \end{cases}$$



$V_{парал} = h \cdot S_{осн}$. Без огр общн считаем, что основ- парал-мм со стор $(a+1)$ и $(c+1)$.

Наклонн $\geq$ перпенд $\Rightarrow h \leq b+1$

$S_{основ} = (a+1)(c+1)\sin\alpha \leq (a+1)(c+1)$ (см рис)

Зн, $V_{парал} \leq (a+1)(b+1)(c+1)$

$F = (a+1)(b+1)(c+1) = (ab+a+b+1)(c+1) =$

$= abc + \boxed{ab} + ac + a + bc + b + c + 1 = (a+b+c) + (ab+ac+bc) +$

$+ abc + 1 = 8 + \boxed{\sqrt{2}} + 13 + 8\sqrt{2} + \boxed{13\sqrt{2}} + 1 =$

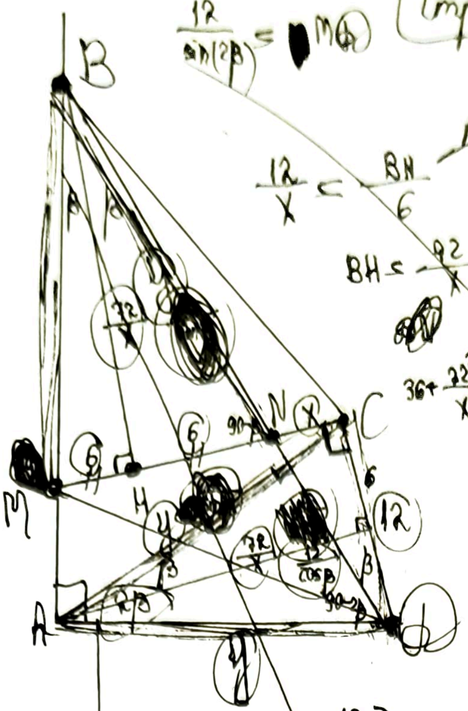
$= 22 + 22\sqrt{2}$.

Оценка $V = 22(1+\sqrt{2})$ достиг-ся, если параллелеп-прямоугольный. При этом при $h \mapsto 0$ будет $V \mapsto 0$ (возьмём в основ прямоуг со стор $(a+1)$ и $(c+1)$, а угол наклона бок ребра паралл к пл-ти основ $\mapsto 0 \Rightarrow$ будет $h \mapsto 0$ (а 3-е ребро $b+1$) $\Rightarrow$ может быть $V \in (0; 22(1+\sqrt{2})]$ $(V > 0)$

Ответ: $(0; 22(1+\sqrt{2})]$.

(стр 3)

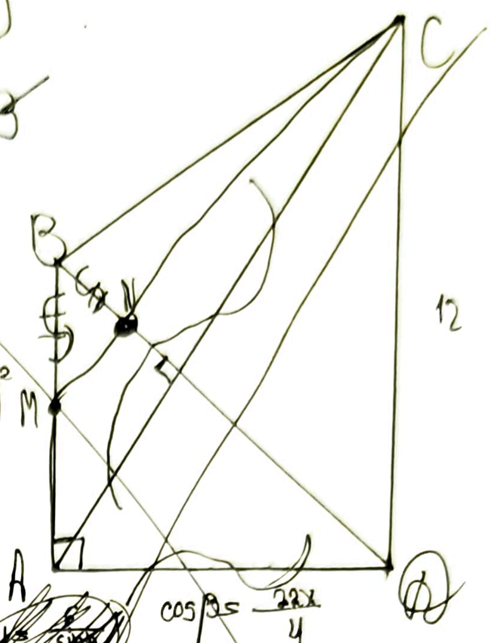
$\frac{12}{\sin(2\beta)} = MD$



$\frac{12}{x} = \frac{BN}{6}$

$BH = \frac{72}{x}$

$36 + \frac{72^2}{x^2} = y^2$



$\cos\beta = \frac{72x}{y}$

$\left(y + \frac{12}{\cos\beta}\right) y = y^2 + \frac{12y}{\cos\beta} = y^2 + \frac{12y \cdot y}{72x} =$

$= y^2 + \frac{12y^2}{72x} =$

$= y^2\left(1 + \frac{12}{72x}\right)$

$\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2 + 1 - 4\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2 - 2\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = 0$

$tg^2\beta + 1 - 4tg^2\beta - 2tg\beta = 0$

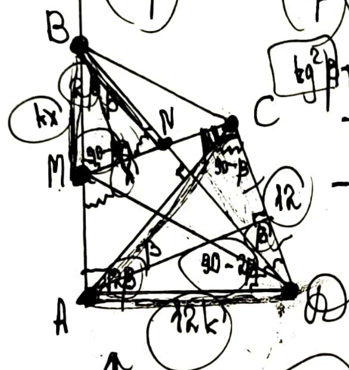
$-3tg^2\beta - 2tg\beta + 1 = 0$

$3tg^2\beta + 2tg\beta - 1 = 0$

$(3tg\beta - 1)(tg\beta + 1) = 0$

$tg\beta = \frac{1}{3}$

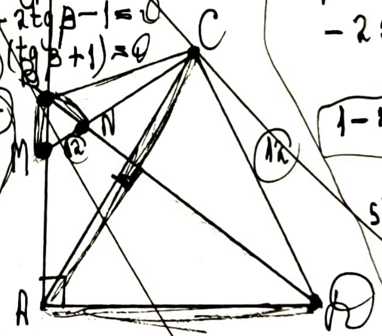
$tg\beta = -1$



$\sin\beta\cos\beta - 4\sin^3\beta\cos\beta - 2\sin^2\beta\cos^2\beta = 0$

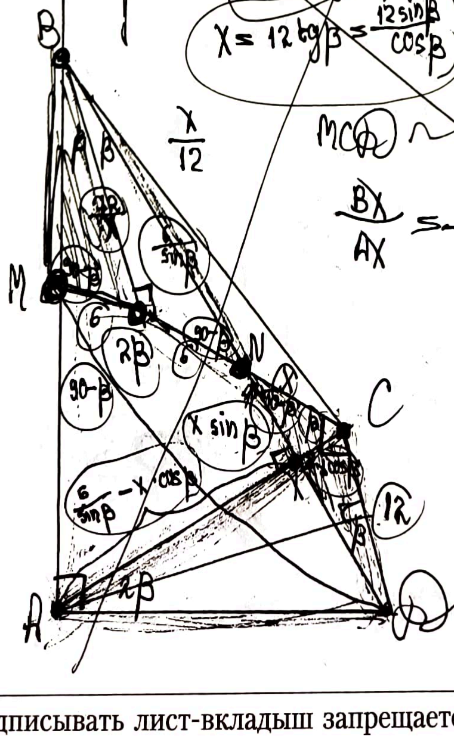
$1 - 4\sin^2\beta - 2\sin\beta\cos\beta = 0$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta - 4\sin^2\beta - 2\sin\beta \times \cos\beta = 0 \; / : \cos^2\beta$



$\frac{x}{12} = tg\beta$

$x = 12\,tg\beta = \frac{12\sin\beta}{\cos\beta}$



$\frac{x}{12}$

$MCD \sim BAX$

$\frac{BX}{AX} = \frac{12+x}{12} = \frac{\frac{6}{\sin\beta} + x\sin\beta}{\frac{6}{\sin\beta} - x\cos\beta}$

$\frac{\frac{12}{12} + \frac{12\sin\beta}{\cos\beta}}{12} = \frac{\frac{6}{\sin\beta} + \frac{12\sin^2\beta}{\cos\beta}}{\frac{6}{\sin\beta} - 12\sin\beta}$

$\frac{\sin\beta + \cos\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta + 2\sin^3\beta}{\cos\beta - 2\sin^2\beta\cos\beta}$

$\sin\beta\cos\beta + \cos^2\beta - 2\sin^3\beta\cos\beta - 2\sin^2\beta\cos^2\beta =$
$= \cos^2\beta + 2\sin^3\beta\cos\beta$

$792 + 8 = 800$ $\quad 1000 : 11 = 90$ ост 10 $\quad 990$ $\quad 800 : 11 = 72$ $\quad 4000 : 11 = 363$ (ост 7)

стр 4

№4

$9 \cdot 13 + 48 = 117 + 48 = 165 = 15 \cdot 11$

1) $\overline{180a} = 1000 + 800 + a \equiv 10 + 8 + a \pmod{11} \equiv a + 7 \pmod{11}$

$\overline{4b78} = 4000 + 100b + 78 \equiv 7 + b + 1 \pmod{11} \equiv$
$\equiv (b+8) \pmod{11}$

По усл $((a+7)(b+8) - 1) \vdots 11$

$(ab + 8a + 7b + \underbrace{56 - 1}_{\vdots 11}) \vdots 11$

$(ab + 8a + 7b) \vdots 11$ (*)

2) Из (*) наход вар для a и b:

a	Из (*)
0	$7b \vdots 11 \Rightarrow b \vdots 11 \Rightarrow$ прот (b – цифра)
1	$b + 8 + 7b = (8b+8) \vdots 11 \Rightarrow (b+1) \vdots 11 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow$ прот (от 1 до 10)
2	$2b + 16 + 7b = (9b+16) \vdots 11 \Rightarrow \cancel{9}^{3}b \equiv \cancel{8}^{2} \pmod{11} \Rightarrow b = 8$
3	$3b + 24 + 7b = (\cancel{10}^{5}b + \cancel{24}^{12}) \vdots 11 \Rightarrow (5b+1) \vdots 11 \Rightarrow b = 2$
4	$4b + 32 + 7b = (11b + 32) \vdots 11$ – невозм для $b \in \mathbb{Z}$
5	$5b + 40 + 7b = (12b + 40) \vdots 11 \Rightarrow (3b + 10) \vdots 11 \Rightarrow b = 4$
6	$6b + 48 + 7b = (13b + 48) \vdots 11 \Rightarrow (2b+4) \vdots 11 \Rightarrow (b+2) \vdots 11 \Rightarrow b = 9$
7	$7b + 56 + 7b = (14b + 56) \vdots 11 \Rightarrow (2b+8) \vdots 11 \Rightarrow (b+4) \vdots 11 \Rightarrow b = 7$
8	$8b + 64 + 7b = (15b + 64) \vdots 11 \Rightarrow (4b+9) \vdots 11 \Rightarrow b = 6$
9	$9b + 72 + 7b = (\cancel{16}^{2}b + \cancel{72}^{9}) \vdots 11 \Rightarrow (2b-2) \vdots 11 \Rightarrow (b-1) \vdots 11 \Rightarrow b = 1$

Тогда имеем вар для чисел: $\overline{ab}$ (или $\overline{ba}$)

Стр 5

28 > 82 > 32 > 23 > 54 > 45 > 69 > 96 > 77 >
86 > 68 > 91 > 19.

Из них простые:
23 и 19.

Проверка: $a=3$, $b=2$

$1803 \cdot 4278 \equiv 10 \cdot 10 \pmod{11} \equiv$
$\equiv 1 \pmod{11}$

$a=9$, $b=1$

$1809 \cdot 4178 \equiv 5 \cdot 9 \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$

$1803 : 11 = 163$ (ост. 10); $4278 : 11 = 388$ (ост. 10)

$1809 : 11 = 164$ (ост. 5); $4178 : 11 = 379$ (ост. 9)

Ответ: 23 и 19.

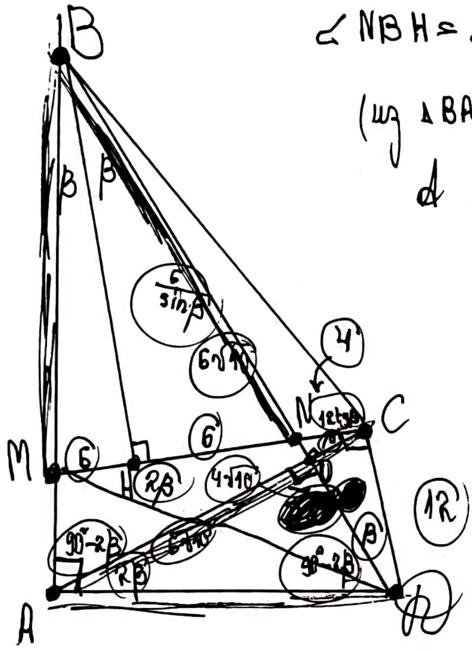
№3

144 + 16 = 160

1) Пров $BH \perp MN$; $AC \cap BD = O$. Тогда в р/б $\triangle BMN$ выс BH явл-ся бис-сой $\Rightarrow$ $\angle NBH = \angle MBH = \beta$. Тогда $\angle BAO = 90° - 2\beta$ (из $\triangle BAO$) $\Rightarrow \angle CAD = 90° - 90° + 2\beta = 2\beta$.

А $\angle ADO = 90° - 2\beta$ (из $\triangle ADO$).

$\left\{ \begin{array}{l} BM = BN = AD = AC \\ \angle CAD = \angle MBN = 2\beta \end{array} \right. \Rightarrow \triangle MBN = \triangle DAC$ (по 2 стор и углу между н.)



Зн, $MH = HN = \frac{CD}{2} = 6$

($MH = HN$, т.к. в р/б $\triangle MBN$ выс BH – медиана).

2) Из р/б $\triangle ACD$ $\angle CDO = \frac{180° - \angle CAD}{2} - \angle ADO$ (т.к. $\angle ADC = \angle ACD$) $= 90° - \beta - 90° + 2\beta \Rightarrow \angle CDO = \beta$.

3) $\angle HBD = \angle BDC = \beta \Rightarrow$ из рав-ва накрест леж углов $CD \parallel BH \Rightarrow CD \perp CM \Rightarrow \angle DCN = 90^\circ$.

4) 2β – угол при верш р/б $\Delta \Rightarrow 2\beta < 180^\circ \Rightarrow \boxed{\beta < 90^\circ}$.

5) $\angle MAD = \angle MCD = 90^\circ \Rightarrow MADC$ – впис 4-уг $\Rightarrow \angle CMD = \angle CAD = 2\beta$

6) ~~Тогда~~ $\Delta CMD \sim \Delta OBA$ (по 2 углам: $\angle MCD = \angle BOA = 90^\circ$ и $\angle CMD = \angle ABO = 2\beta$) $\Rightarrow \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{BO}{AO} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{12 + CN}{12} = \dfrac{BN + NO}{AO}$ ($\angle DCA < \angle DCM \Rightarrow N$ – на отр BO)

(из ΔCND) (из ΔBNH) ($\angle DCA$ остр. (при основ р/б Δ)) ($\angle DCM = 90^\circ$)

Зн $\dfrac{\cancel{12} + \cancel{12}\operatorname{tg}\beta}{\cancel{12}} = \dfrac{\frac{6}{\sin\beta} + CN \cdot \sin\angle NCO}{AC - CO} \Rightarrow$ т.к. $\angle NCO = 90^\circ - \angle ODC = \angle CDO = \beta$

$\Rightarrow \dfrac{1 + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1} = \dfrac{\frac{6}{\sin\beta} + 12\operatorname{tg}\beta \cdot \sin\beta}{BN - CN \cdot \cos\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\beta + \cos\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{\cancel{6}}{\sin\beta} + \frac{\cancel{12}^{2}\sin^2\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cancel{6}}{\sin\beta} - \cancel{12}^{2}\operatorname{tg}\beta \cdot \cos\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\beta + \cos\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{1}{\sin\beta} + \frac{2\sin^2\beta}{\cos\beta}}{\frac{1}{\sin\beta} - \frac{2\sin\beta\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\beta}}} \Rightarrow \dfrac{\sin\beta + \cos\beta}{\cos\beta} =$

$= \dfrac{\cos\beta + 2\sin^3\beta}{\cos\beta - 2\sin^2\beta\cos\beta} \Rightarrow \sin\beta\cos\beta - 2\sin^3\beta\cos\beta +$

$+ \cancel{\cos^2\beta} - 2\sin^2\beta\cos^2\beta = \cancel{\cos^2\beta} + 2\sin^3\beta\cos\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sin^3\beta\cos\beta + 2\sin^2\beta\cos^2\beta - \sin\beta\cos\beta = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\text{Стр 7}}$

$\Rightarrow$ поделим на $\sin\beta\cos\beta \neq 0$ $\left(\text{т.к. } \beta \in (0; 90^\circ)\right) \Rightarrow$

$4\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta - 1 = 0 \Rightarrow 4\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta - \sin^2\beta - \cos^2\beta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sin^2\beta - \cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta = 0 \quad /: \cos^2\beta$

$3\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = 0$

$3tg^2\beta + 2tg\beta - 1 = 0$ Зн. $\boxed{tg\beta = \frac{1}{3}}$.

$(3tg\beta - 1)(tg\beta + 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\beta = \frac{1}{3} \\ tg\beta = -1 \text{ — не подх. т.к. } \beta \in (0; 90^\circ) \end{array}\right.$

Зн. $CN = 12\,tg\beta = \frac{12}{3} = 4$.

$ND = \sqrt{CN^2 + CD^2}$ (Th Пифаг) $= \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{3^2+1} =$

$= \boxed{4\sqrt{10}}$.

$AC = BN = \frac{6}{\sin\beta}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \quad /: \cos^2\beta$

$tg^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{9}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}}$.

Зн. $AC = BN = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = 6\sqrt{10}$.

$\angle COD = 90^\circ$

$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\angle COD}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2} =$

$= \frac{6\sqrt{10} \cdot (6\sqrt{10} + 4\sqrt{10})}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{10} \cdot 10\sqrt{10}}{\cancel{2}} = 300$

Ответ: 300.

Стр 8

№5

Пол —> очков

П и О

12 чис — от 1 до 6, от 1 до 6 ⇒ Σ

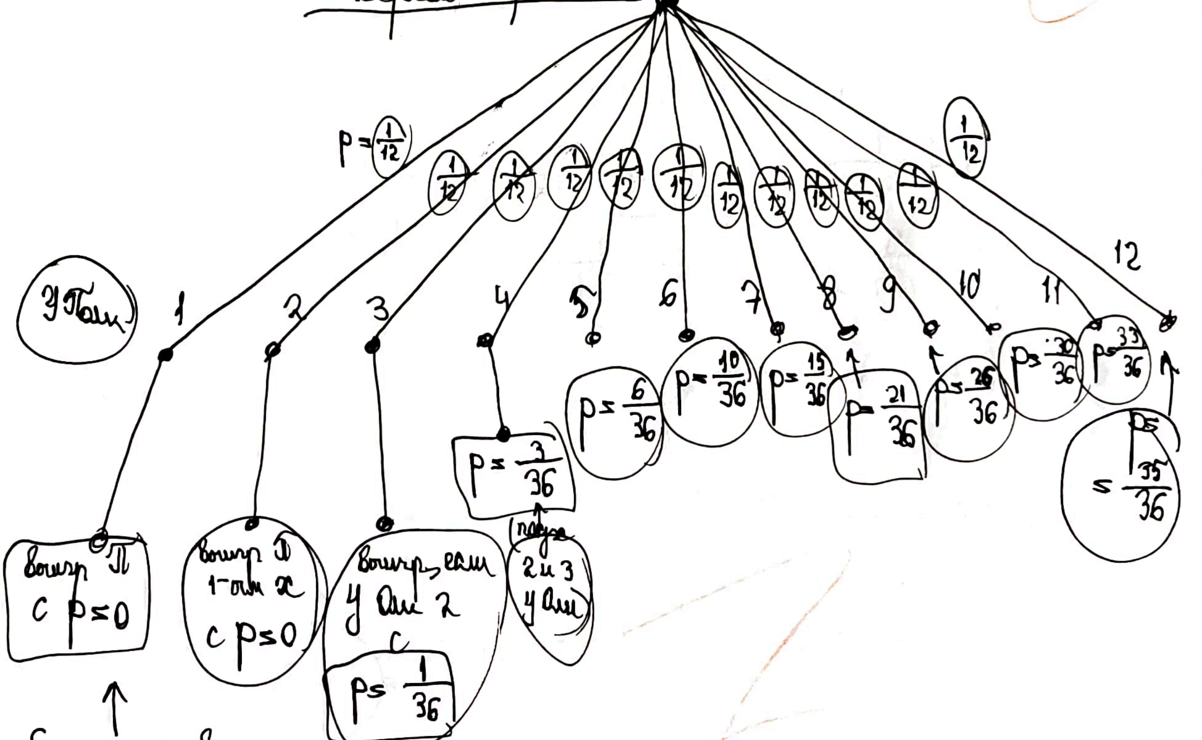
A

- у Пол: от 1 до 12.
- у Оли:

1к\2к	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Сумма Оли

Дерево вер-ти:



Считаем условно вер-ть выигр П 1-ого x (при условии на 1 x Пол)

(стр 9)

Вер-ть выигр Поли =

$$\frac{1}{12}\cdot 0+\frac{1}{12}\cdot 0+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{36}+\ldots+\frac{1}{12}\cdot\frac{35}{36}=$$

$$=\frac{1}{12\cdot 36}\cdot\left(1+\overset{(2+1)}{3}+6+10+15\overset{+21}{+}26+30+33+35\right)=$$

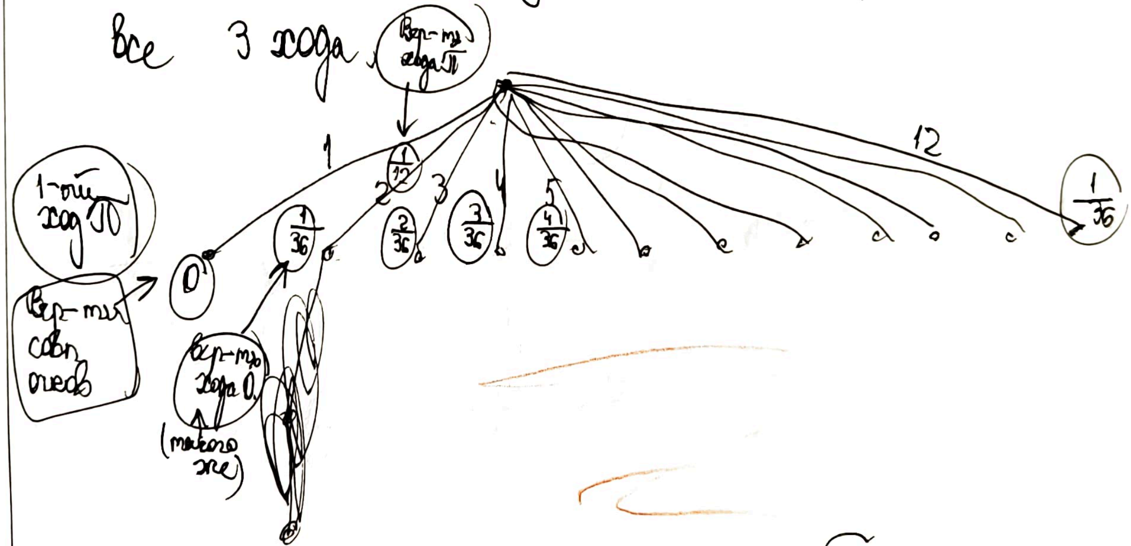
$$=\frac{\cancel{180}^{\,5}}{12\cdot\cancel{36}}=\frac{5}{12}$$

$$\begin{array}{r} 35\\ 33\\ 30\\ 26\\ 21\\ 15\\ 10\\ 6\\ 4\\ \hline 180 \end{array}$$

Отв: А) $\frac{5}{12}$.

Б)

Поб не выявл, если у девоч # очков равны все 3 хода



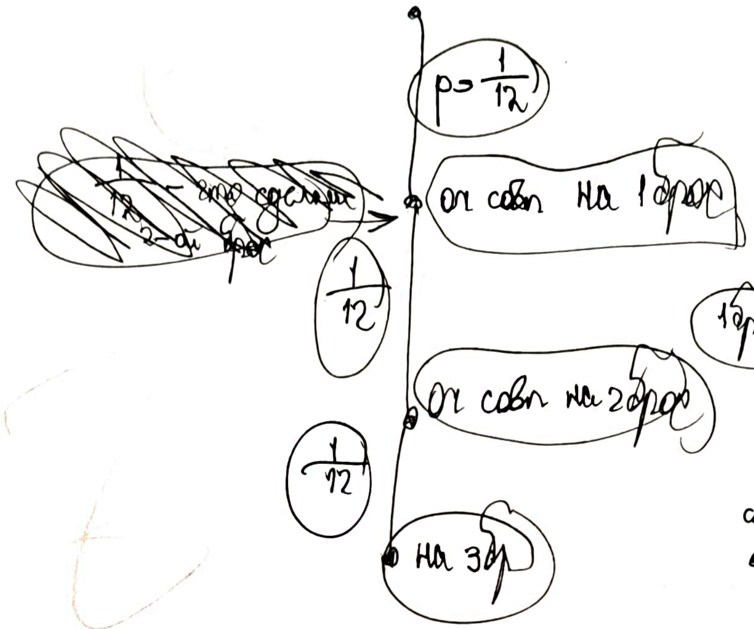
$P_{\text{совп оч 1 раз}}$ (т.к. все 3 брос не завис) =

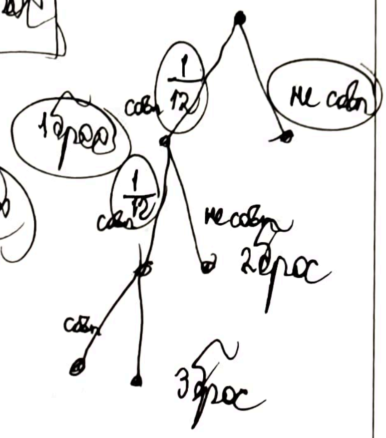
$$=\left(\frac{1}{12\cdot 36}+\frac{2}{12\cdot 36}+\frac{3}{12\cdot 36}+\ldots+\frac{1}{12\cdot 36}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{12\cdot 36}\cdot\left(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{36}{12\cdot 36}\right)=\boxed{\frac{1}{12}}.$$

Стр 10





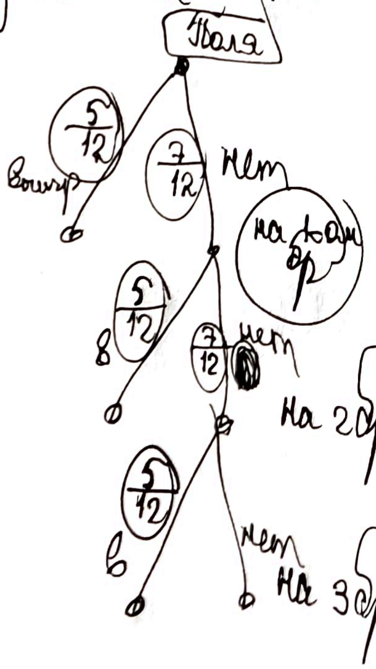
$P_{\text{совп на всех бр}} = P^3_{1\,\text{бр}}$ (т.к. брос независ) $= \frac{1}{12^3}$

Отв: Б $\frac{1}{12^3}$

В

$$\begin{array}{r} \times\,35 \\ 12 \\ \hline 70 \\ +\,35 \\ \hline 420 \end{array}$$

$P_{\text{выигр Оли}} = 1 - P_{\text{выигр Толи}} - P_{\text{побед не выявл}}$



$P_{\text{выигр Толи}} = \underbrace{\frac{5}{12}}_{\text{за 1х}} + \underbrace{\frac{7\cdot 5}{12^2}}_{\text{за 2х}} + \underbrace{\frac{7\cdot 7\cdot 5}{12^3}}_{\text{за 3х}} =$

$= \frac{5\cdot 144 + 35\cdot 12 + 49\cdot 5}{12^3} =$

$= \frac{720 + 420 + 245}{12^3} = \frac{1385}{12^3}$

$P_{\text{Оли}} = \frac{12^3 - 1386}{12^3}$